開水路の定常流（2）：限界水深，流れの遷移

Steady open channel flow (2): critical depth, flow transition

教科書 pp. 85--95

１．比エネルギーと限界水深

1-1　Bélanger の定理

比エネルギーE は以下のように記述される．

$$E = \frac{\alpha v^2}{2g} + h\cos\theta = \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} + h\cos\theta \qquad (1)$$

ここで，A は流水断面積（流積），v は断面平均流速，Q は流量，αはエネルギー補正係数，θは水路床と水平面のなす角，h は水路床に対して垂直に測った水深（補足：実際の観測では，観測の容易さのため水面に対して垂直に（すなわち鉛直方向）計測されることがほとんどである）である．式（1）を以下のように展開する．

$$Q = \sqrt{\frac{2gA^2}{\alpha}\left(E - h\cos\theta\right)} \qquad (2)$$

簡単のため一様矩形断面水路（A=Bh，B は水路幅で一定値）とすれば式（2）は式（3）のようになる．

$$Q = \sqrt{\frac{2gB^2h^2}{\alpha}\left(E - h\cos\theta\right)} \qquad (3)$$

比エネルギーを一定として式（3）をグラフで表せば図-1 にようになる（縦軸に水深，横軸に流量）．

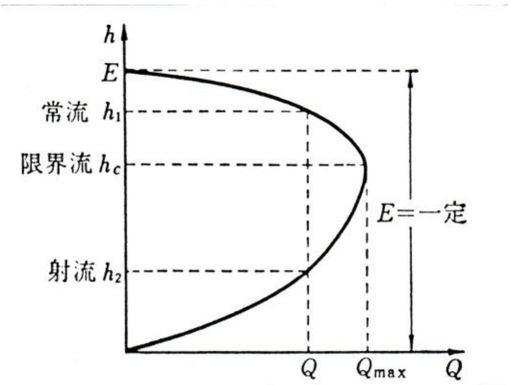

図-1　h～Q 曲線

図-1 から分かるように同じエネルギーで同一の流量を流すのに二種類の水深が存在する．水深の大きい方が常流，小さい方が射流に対応する．流量が最大（Q=Q_{max}）の時，h_1=h_2=h_c である．このことを確かめてみよう．

式（1）を水深 h で微分する．ここでは，比エネルギーE は一定値であることに注意すれば次式を得る．

$$\frac{\partial E}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\alpha Q^2}{2gA^2} + h\cos\theta\right) = \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\alpha Q^2}{2gA^2}\right) + \frac{\partial}{\partial h}h\cos\theta = \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{\alpha Q^2}{2gA^2}\right)\frac{\partial Q}{\partial h} + \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{\alpha Q^2}{2gA^2}\right)\frac{\partial A}{\partial h} + \cos\theta$$

$$= \frac{\alpha Q}{gA^2}\frac{\partial Q}{\partial h} - \frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial h} + \cos\theta = 0 \qquad (4)$$

流量が最大（$\partial Q/\partial h = 0$）のとき式（4）は

$$\cos\theta - \frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial h} = 0 \qquad (5)$$

となる．これは水面形方程式の分母が 0 であることを意味する．つまりこの時の水深は限界水深となる．

限界水深の定義その 2：限界水深とは同一の比エネルギーにおいて流量を最大にする水深である．これを Bélanger の定理（最大流量の定理）という．

式（3）を最大にする水深（すなわち限界水深）と比エネルギーの関係を求めてみよう（cosθ=1 としている）．式（3）を水深で微分し極値を求める（極値が最大値であることの証明は割愛）．

$$\frac{\partial Q}{\partial h}=\frac{1}{2}\left(\frac{2gB^2h^2(E-h)}{\alpha}\right)^{-1/2}\left(\frac{4gB^2Eh}{\alpha}-\frac{6gB^2h^2}{\alpha}\right)=0 \qquad (6)$$

式（6）が恒等的に 0 になるためには $4Eh=6h^2$ となればよい．したがって

$$h_C=\frac{2}{3}E \qquad (7)$$

が得られる．限界水深は比エネルギーE の 2/3 倍の大きさになる（式（7）は矩形一様断面水路あるいは単位幅で考えている場合に成立することに注意）．これは以下の様にしても求められる．
限界水深時の比エネルギーは以下のようになる．

$$E=\frac{\alpha v_C^2}{2g}+h_C \qquad (8)$$

v_c は限界流の断面平均流速である．なお簡単のため $\alpha=1$, cosθ=1 としている．限界流ではフルード数 $F_r=1$ なので

$$F_r=\frac{v_C}{\sqrt{gh_C}}=1 \qquad (9)$$

式（9）を式（8）に代入すると

$$E=\frac{\alpha+2}{2}h_C \qquad (10)$$

通常は $\alpha=1$ として良いので式（7）が得られる．

1-2　Böss の定理

矩形断面一様水路（$A=Bh$，B は水路幅で一定値）に対して式（1）は以下のように記述される．

$$E=\frac{\alpha Q^2}{2gB^2h^2}+h\cos\theta \qquad (11)$$

図-2 は流量 Q を一定として式（11）をグラフ化したものである．

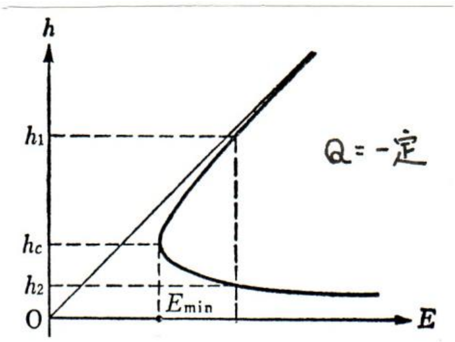

図-2　h～E 曲線

限界水深の定義その 3：限界水深とは同一の流量において比エネルギーを最小にする水深である．これを Böss の定理（最小比エネルギーの定理）という．

一様矩形断面水路の限界水深を式（11）から求める．式（11）を水深で微分する．

$$\frac{\partial E}{\partial h}=-\frac{\alpha Q^2}{gB^2h^3}+\cos\theta=0 \qquad (12)$$

式（12）から次式が得られる．

$$h_C = \left(\frac{\alpha Q^2}{g B^2 \cos\theta} \right)^{1/3} \qquad (13)$$

２．限界水深の求め方

矩形断面水路では式（13）で限界水深を求めることができるが，他の断面形状では以下のようにして求める．

式（5）を以下のように変形する．

$$\frac{\alpha Q^2}{g\cos\theta} = \frac{A^3}{\partial A/\partial h} = \frac{A^3}{B} \qquad (14)$$

ここで$\partial A/\partial h = B$（水面幅）である．式（14）平方根をとれば

$$\sqrt{\frac{\alpha Q^2}{g\cos\theta}} = \sqrt{\frac{A^3}{B}} \equiv Z(h) \qquad (15)$$

$Z(h)$は断面係数と呼ばれる．水深と流積の関係式および水深と水面幅の関係式が既知であれば断面係数も水深の関数として与えられる．流量と断面係数が与えられていれば，式（15）（もちろん式（14）でもよい）の等号が成立する水深を求めることができる．このときの水深が限界水深である．

３．流れの遷移（マウンド上の流れ：flow over a mound）

3-1　マウンド上の水面形状

図-3 に示すようにマウンド高さを s，水深を h，水位を $H=h+s$ とする．簡単のため幅方向は一様と考える（鉛直 2 次元で考える）．

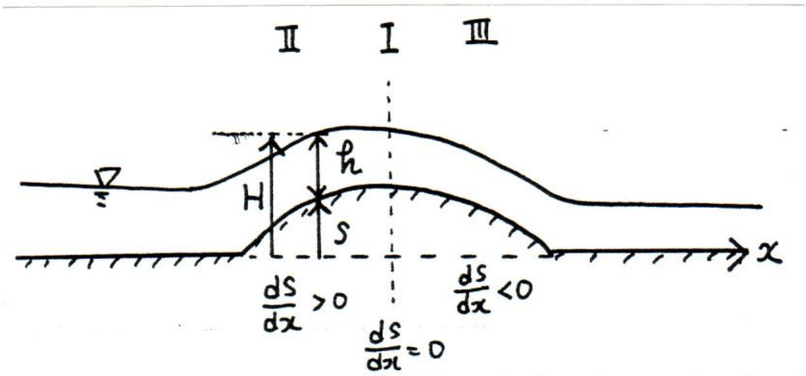

図-3　マウンド上の流れ

流量は単位幅流量を q（$q=vh$，次元は$[L^2T^{-1}]$）を用いる．底面摩擦を考えないとすれば流れの基礎式は以下のようになる．

連続の式

$$\frac{d}{dx}(vh) = 0 \qquad (16)$$

エネルギーの式

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g} + h + s \right) = 0 \qquad (17)$$

ここで，エネルギー補正係数αは 1 としている．

式（16），（17）から dv/dx を消去する．まず連続の式から

$$\frac{d}{dx}(vh)=h\frac{dv}{dx}+v\frac{dh}{dx}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{h}\frac{dh}{dx}=-\frac{v}{h}\frac{d(H-s)}{dx}$$

次にエネルギー式から

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}+h+s\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}+H\right)=\frac{v}{g}\frac{dv}{dx}+\frac{dH}{dx}=0$$

以上より dv/dx を消去すれば以下のようになる．

$$\frac{v}{g}\frac{dv}{dx}+\frac{dH}{dx}=-\frac{v}{g}\frac{v}{h}\frac{d(H-s)}{dx}+\frac{dH}{dx}=-\frac{v^2}{gh}\frac{dH}{dx}+\frac{v^2}{gh}\frac{ds}{dx}+\frac{dH}{dx}=\left(1-\frac{v^2}{gh}\right)\frac{dH}{dx}+\frac{v^2}{gh}\frac{ds}{dx}=0$$

$$\left(1-\frac{v^2}{gh}\right)\frac{dH}{dx}=-\frac{v^2}{gh}\frac{ds}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{dH}{dx}=-\frac{1}{1-v^2/gh}\frac{v^2}{gh}\frac{ds}{dx}$$

ここで $F_r=v/\sqrt{gh}$ （フルード数）とおけば

$$\frac{dH}{dx}=\frac{-F_r^2}{1-F_r^2}\frac{ds}{dx} \qquad (18)$$

常流ではフルード数は1以下，射流ではフルード数は1以上なので式（18）より

常流：dH/dx～$-ds/dx$　　　射流：dH/dx～ds/dx

の関係が得られる．

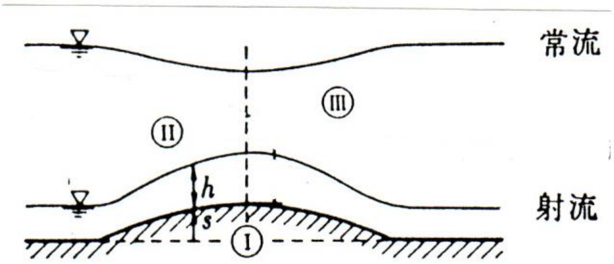

図-4　マウンド上の常流・射流

図-4 に示すようにマウンドの高さの増加領域（$ds/dx>0$）をⅡ，頂上（$ds/dx=0$）をⅠ，高さの減少領域（$ds/dx<0$）をⅢとする．それぞれの領域で水位 H の増減は式（18）より以下のようになる．

領域	マウンド勾配	常流	射流
Ⅱ	$ds/dx>0$	$dH/dx<0$	$dH/dx>0$
Ⅰ	$ds/dx=0$	$dH/dx=0$	$dH/dx=0$
Ⅲ	$ds/dx<0$	$dH/dx>0$	$dH/dx<0$

常流では水面形状は水路床形状と逆位相，射流では同位相になる．

3-2　常流から射流の遷移

領域Ⅱが常流（$F_r<1$），領域Ⅲが射流（$F_r>1$）になっている場合を考える．$F_r=1$ となる場所がマウンドのどこかに存在する．式（18）において $F_r=1$ を代入すると

$$\frac{dH}{dx}=\frac{-F_r^2}{1-F_r^2}\frac{ds}{dx}=\frac{-1}{1-1}\frac{ds}{dx}=\frac{-1}{0}\frac{ds}{dx}$$

となる．上式が無限大に発散せず有限値をとるためには $ds/dx=0$ でなければならない（0/0 の不定形）．

つまりマウンド頂点で F_r=1 となる．ここで限界流が発生し水深は限界水深となる．

常流から射流の遷移において限界流が生じる．その発生断面を支配断面（control section）という．

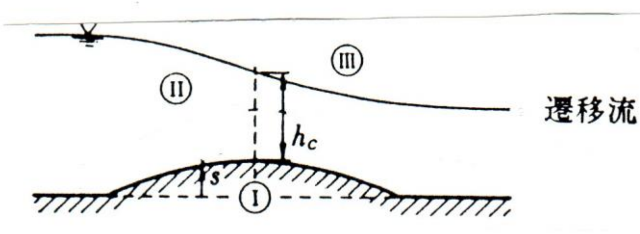

図-5　常流から射流の遷移

摩擦がなく水路床が水平で水路幅 B がなだらかに変化する場合

水面形方程式は次式で表される。記号の説明は第 9 回目のプリントを参照すること。

$$\frac{dh}{dx}=\frac{\sin\theta-\dfrac{1}{\varphi^2 gR}\left(\dfrac{Q}{A}\right)^2+\dfrac{\alpha Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial B}\dfrac{dB}{dx}}{\cos\theta-\dfrac{\alpha Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial h}}$$

摩擦がないということは壁面せん断応力τ_0が 0 である（すなわち摩擦速度が 0）ので流速係数$\varphi(=v/u_*)$は無限大となり，上式の分子の第 2 項は 0 となる。また水平なのでθ=0 であるので，

$$\frac{dh}{dx}=\frac{\dfrac{\alpha Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial B}\dfrac{dB}{dx}}{1-\dfrac{\alpha Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial h}}=\frac{\dfrac{1}{gA}\dfrac{\alpha Q^2}{A^2}\dfrac{\partial A}{\partial B}}{1-\dfrac{1}{gA}\dfrac{\alpha Q^2}{A^2}\dfrac{\partial A}{\partial h}}\frac{dB}{dx}=\frac{\dfrac{\alpha v^2}{gA}h}{1-\dfrac{\alpha v^2}{gA}B}\frac{dB}{dx}$$

ここで，$\dfrac{\partial A}{\partial B}=h,\ \dfrac{\partial A}{\partial h}=B$ である。また $Fr^2=\dfrac{\alpha v^2}{gA/B}$ で定義されるフルード数を導入すると。

$$\frac{dh}{dx}=\frac{\dfrac{\alpha v^2}{gA}h}{1-\dfrac{\alpha v^2}{gA}B}\frac{dB}{dx}=\frac{\dfrac{\alpha v^2}{gA/B}\dfrac{h}{B}}{1-\dfrac{\alpha v^2}{gA/B}}\frac{dB}{dx}=\frac{Fr^2}{1-Fr^2}\frac{h}{B}\frac{dB}{dx} \qquad (19)$$

式（19）より

常流（Fr<1）では $\dfrac{dB}{dx}>0$ では $\dfrac{dh}{dx}>0$， $\dfrac{dB}{dx}<0$ では $\dfrac{dh}{dx}<0$

斜流（Fr>1）では $\dfrac{dB}{dx}>0$ では $\dfrac{dh}{dx}<0$， $\dfrac{dB}{dx}<0$ では $\dfrac{dh}{dx}>0$

水面形の図は教科書 p.95 の図 3.13 を参照すること。