

開水路の定常流 (3) : 射流から常流への遷移 (跳水)

Steady open channel flow (3): transition from super-critical flow to sub-critical flow
(hydraulic jump)

教科書 pp.98-102

1. 射流から常流への遷移

1-1 跳水 (hydraulic jump)

前回のプリントでは摩擦のない場合のエネルギーの式 (非粘性流体のエネルギー式と考えることができる) と連続の式を用いてマウンドを越える流れを考察した. そして常流から射流に遷移するところで限界水深が発生することを述べた (支配断面の発生). 逆に射流から常流に遷移する場合はどうか? 図-1 に示すようにこの場合にもマウンド頂上でフルード数 1 の断面が発生し, 射流から常流に遷移する (マウンド頂上で水面形方程式は 0/0 の不定形になる).

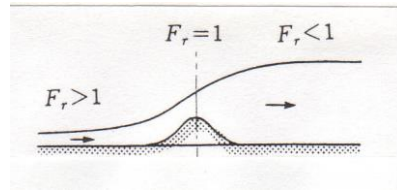


図-1 マウンドを越える流れ (非粘性流体の場合)

次に, マウンドを用いずに水平のまま, かつ粘性流体において射流から常流の遷移を考える. この場合図-2 に示すように常流と射流の遷移断面で激しい渦が発生する. これを跳水とよぶ.

跳水によって射流の持つ運動エネルギーが大量に損失し, 運動エネルギーの小さな常流へと遷移する.

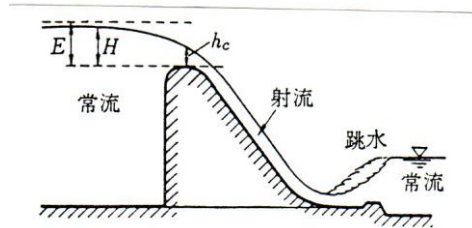


図-2 支配断面と跳水

射流—常流の遷移では以下のような現象が生じる.

常流から射流の遷移においてはフルード数が 1 となる断面, すなわち支配断面が現れる.

射流から常流の遷移においては跳水が発生する.

射流 ($F_r > 1$) から常流 ($F_r < 1$) への遷移において $F_r = 1$ となる断面がどこかに存在する. $F_r = 1$ では水深は限界水深となる. 限界水深は水面形方程式を發散させる (分母が 0 になる) 水深であり, 数学的には特異点である ($dH/dx = \infty$, つまり傾きが垂直になる). 実際現象では跳水が発生し, 射流の小さな水深と常流の大きな水深を接続する (図-3 参照).



図-3 跳水現象

1-2 跳水と比エネルギー

図-4 は跳水前後の水深 h と比エネルギー E の関係を示している。跳水発生前の比エネルギーの一部が激しい渦によって損失するため、跳水後 (B 点) の比エネルギーは小さくなる。 ΔE は跳水前後の比エネルギー差 (A 点の比エネルギーと B 点の比エネルギー差) である。

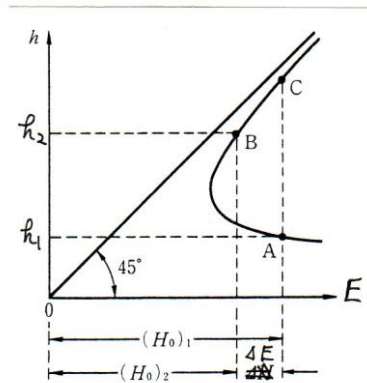


図-4 $h \sim E$ 曲線

A 点が跳水発生前 (射流), B 点が跳水発生後 (常流)
エネルギー損失が全く無いとすれば跳水発生後は C 点になる。

1-3 跳水前後の水深の関係

跳水前後の水深の関係を考察しよう。図-5 に示すように、水平面に対して θ だけ傾いている水路床で発生している跳水を考える。簡単のため単位幅で考える。跳水前の水深を h_1 , 断面平均流速を v_1 , 全水圧を P_1 とする。また跳水後のそれらを h_2 , v_2 , P_2 とする。 L_j は跳水長, 単位幅流量は q である。水路床に沿って x 軸をとる。

ΔE が不明なのでエネルギー保存則 (ベルヌイの定理) は解析方法として使用できない。しかしながら、運動量保存の法則 (運動量の定理) は使用可能である。

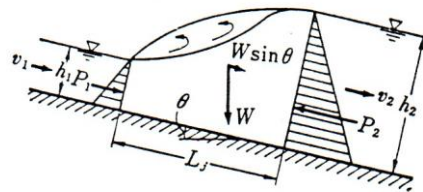


図-5 傾斜水路の跳水

図-5 のように跳水を取り囲むようなコントロールボリュームを考える。このコントロールボリュームに対して運動量の定理を適用すれば以下のようなになる。

$$0 = \rho q(v_1 - v_2) + P_1 - P_2 + W \sin \theta \quad (1)$$

ここで ρ は水の密度, W はコントロールボリュームの自重である。圧力は静水圧分布に従うものとするれば全水圧 P_1 , P_2 はそれぞれ以下のようなになる。

$$P_1 = \int_0^{h_1} \rho g \cos \theta (h_1 - y) dy = \frac{\rho g h_1^2}{2} \cos \theta \quad (2)$$

$$P_2 = \int_0^{h_2} \rho g \cos \theta (h_2 - y) dy = \frac{\rho g h_2^2}{2} \cos \theta \quad (3)$$

コントロールボリュームの形状を台形と近似すれば W は

$$W = K \frac{(h_1 + h_2)L_j}{2} \rho g \quad (4)$$

ここで K は形状を台形としたため生じる実際の面積との誤差を補正する係数である。

連続の式は

$$q = h_1 v_1 = h_2 v_2 \quad (5)$$

である。式 (2) ~ (5) を式 (1) に代入して整理すれば次式を得る。

$$q^2 \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right) - g \cos \theta \left(\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right) - K \frac{(h_1 + h_2)L_j}{2} \rho g \sin \theta = 0 \quad (6)$$

議論を簡単にするために水平な水路床 ($\theta=0$) を考える。式 (6) は式 (7) のように書き換えられる。

$$q^2 \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right) - g \left(\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right) = 0 \quad (7) \quad (h_1 - h_2) \left(\frac{q^2}{gh_1 h_2} - \frac{h_1 + h_2}{2} \right) = 0 \quad (8)$$

連続解 ($h_1=h_2$) 以外で式 (8) を満足させるためには

$$\frac{q^2}{gh_1 h_2} = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

となればよい。上式を展開していくと

$$\frac{q^2}{gh_1 h_2} = \frac{h_1 + h_2}{2} \rightarrow h_1 h_2 (h_1 + h_2) = \frac{2q^2}{g} \rightarrow h_1^2 h_2 + h_1 h_2^2 = \frac{2q^2}{g}$$

両辺を h_1^3 で割ると

$$\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - \frac{2q^2}{gh_1^3} = 0 \quad (9)$$

ここで $v_1^2 / gh_1 = (q/h_1)^2 / gh_1 = q^2 / gh_1^3 = F_{R1}^2$ (跳水前の水深 h_1 で作られるフルード数) を用いれば式 (9)

は以下のようになる。

$$\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - \frac{2q^2}{gh_1^3} = 0 \rightarrow \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - 2F_{R1}^2 = 0$$

$X = h_2 / h_1$ とおいて上式を整理すれば

$$X^2 + X - 2F_{R1}^2 = 0$$

二次方程式の解の公式から X は

$$X = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8F_{R1}^2}}{2}$$

X は水深比なので \pm は $+$ をとる。よって

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\sqrt{1 + 8F_{R1}^2} - 1}{2} \quad (10)$$

または

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{1 + 8F_{R2}^2} - 1}{2} \quad (11)$$

ここで、 $F_{R2}^2 = q^2 / gh_2^3$ である。跳水前後の水深を共役水深 (conjugate depth) という。

1-4 跳水によるエネルギー損失

跳水前後の水深の関係が分かったので跳水によるエネルギー損失が計算できる. エネルギー損失を ΔE とすれば

$$\Delta E = \left(\frac{v_1^2}{2g} + h_1 \right) - \left(\frac{v_2^2}{2g} + h_2 \right) = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + h_1 - h_2 \quad (12)$$

式 (10), (11) から流速が以下のように表される.

$$v_1^2 = \frac{gh_1}{2} \left(\frac{h_2^2}{h_1^2} + \frac{h_2}{h_1} \right) \quad v_2^2 = \frac{gh_2}{2} \left(\frac{h_1^2}{h_2^2} + \frac{h_1}{h_2} \right)$$

これらを式 (12) に代入し整理すれば ΔE が以下のように求まる.

$$\Delta E = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1h_2} \quad (13)$$

1-5 比力 (specific force)

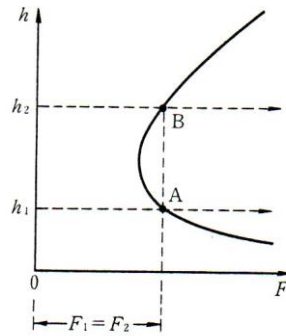


図-6 $h \sim F$ 曲線

A 点が跳水発生前 (射流), B 点が跳水発生後 (常流)

式 (7) を以下のように展開する.

$$q^2 \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right) - g \left(\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{q^2}{gh_2} - \frac{q^2}{gh_1} - \frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{h_1^2}{2} + \frac{q^2}{gh_1} = \frac{h_2^2}{2} + \frac{q^2}{gh_2} \quad (14)$$

式 (14) の両辺は比力と呼ばれる量である (比力 $F = h^2/2 + q^2/(gh)$). 式 (14) は比力が跳水の前後で等しいことを示している. これは跳水の前後で運動量が保存されていることを表す. 図-6 は比力 F と水深 h の関係を示したもので, 図-4 と異なり跳水の前後で比力は等しい.