開水路の定常流（4）：等流

Steady open channel flow (4): uniform flow

教科書 pp.72-78、83-85、90-92

１．等流（uniform flow）

1-1　等流の説明

<u>等流：流下方向に水深，流速が変化しない流れ．</u>

開水路の等流は水柱の自重の流下方向成分と潤辺に働く摩擦応力が釣り合った流れ（加速，減速をしない）である．傾斜角が一定の長い一様断面水路に見られる．

1-2　疑似等流

等流は先に述べたように重力と摩擦力が釣り合って達成される．そのためには，水路断面は一様断面で非常に長い水路長が必要となる．現実の河川では，断面は一様ではなく，また蛇行しているため等流状態にはならない．しかしながら，局所的に水面形方程式の分子が 0 になることがある．その場合 $dh/dx=0$ となり，局所的に等流と同じ状態になる．これを疑似等流という．そこではエネルギー勾配と水路床勾配が等しくなる．

1-3　等流の平均流公式（教科書 pp. 72-73 参照）

等流が成立する条件は水面形方程式の分子が 0 となることである．一様断面水路の水面形方程式は

$$\frac{dh}{dx}=\frac{\sin\theta-\dfrac{1}{\varphi^2 gR}\left(\dfrac{Q}{A}\right)^2}{\cos\theta-\dfrac{\alpha Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial h}} \qquad (1)$$

である．分子=0 の条件から

$$\sin\theta-\frac{1}{\varphi^2 gR}\left(\frac{Q}{A}\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad Q=\varphi A\sqrt{gR\sin\theta} \quad\rightarrow\quad \frac{Q}{A}=v=\varphi\sqrt{gR\sin\theta}=\varphi\sqrt{gRI}=\varphi u_*$$

を得る．v は断面平均流速，u_*は摩擦速度，$\varphi(=v/u_*)$は流速係数である．φは様々な提案式があるが，$v=\varphi u_*$が成立するような状態で等流となる．

等流状態のときの断面平均流速を求める公式が種々提案されている．それを以下に紹介する．

自然河川などではレイノルズ数が大きくかつ壁面が粗い場合が多いので，平均流公式として粗面に対する対数則が用いられる．

$$\frac{v}{u_*}=\varphi=6.0+5.75\log_{10}\frac{R}{k_s} \qquad (2)$$

R は径深，k_s は相当粗度である．

式（2）は理論的な式であるが，実務では管路でも登場した次の経験式が用いられる．

$$v=\frac{1}{n}R^{2/3}I^{1/2} \qquad (3) \qquad\qquad v=CR^{1/2}I^{1/2} \qquad (4)$$

式（3），（4）はそれぞれ Manning の式，Chezy の式である．実務では Manning の式が用いられることが多い．I はエネルギー勾配を用いる．式（3），（4）とも厳密には等流で成立する式である．等流ではエネルギー勾配，水面勾配，水路床勾配は一致する．簡便さから不等流にも適用されるが，このときの I はエネルギー勾配でなければならない．流速係数は以下のようになる．

Manning の式：$\varphi=R^{1/6}/\left(n\sqrt{g}\right)$　　　Chezy の式：$\varphi=C/\sqrt{g}$

1-4　等流水深（normal depth）の計算（教科書 pp. 75-76 参照）

Manning の式あるいは Chezy の式を以下のように記述する．

$$Q = vA = \frac{A}{n} R^{2/3} I^{1/2} = CAR^{1/2} I^{1/2} = K\sqrt{I} \qquad (5)$$

ここで K は通水能（conveyance）と呼ばれ以下のようになる．

$$K = \frac{A}{n} R^{2/3} = CAR^{1/2}$$

K は水深の関数となる．式（5）を書き直して

$$\frac{Q}{\sqrt{I}} = K(h) \qquad (6)$$

流量 Q，水路床勾配 I（等流なのでエネルギー勾配，水面勾配も同じになる），粗度係数が与えられたときに式（6）を満足する水深が等流水深になる．

1-5　潤辺が二つ以上の異なる粗度からなる水路の等流計算

・複断面河川の場合

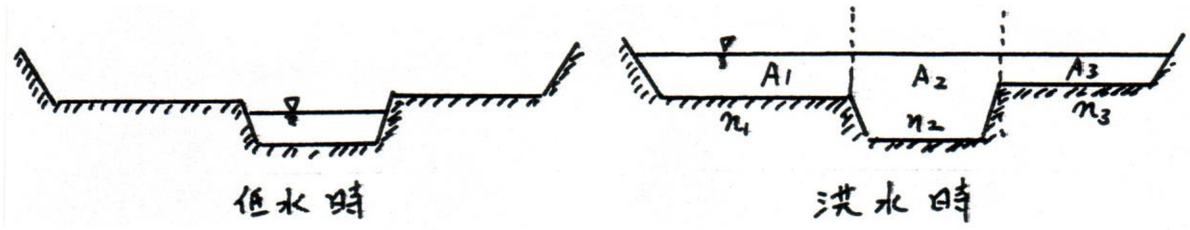


図-1　複断面水路

河川を適当に n 個の断面に分割し，各断面ごとの流量を算出して集計する．

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{n_i} R_i^{2/3} I^{1/2}$$

・壁の粗度係数が異なる長方形断面水路（教科書 pp. 90-91 参照）

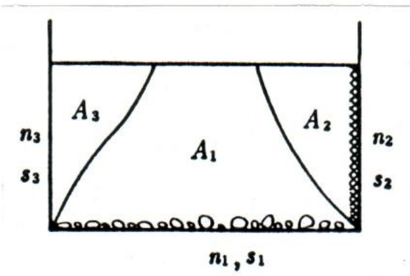


図-2　壁面の粗度係数が異なる場合

複断面河川では断面分割が直感的に行えるが，図-2 のような場合では直感的には適切な断面分割が行えない．

Einstein の方法

仮定：分割断面の断面平均流速と断面全体の断面平均流速が等しい．

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2} = \frac{1}{n_i} R_i^{2/3} I^{1/2}$$

$R = A/S,\quad R_i = A_i/S_i,\quad A = \Sigma A_i,\quad S = \Sigma S_i$ より

$$\frac{1}{n}\left(\frac{A}{S}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{n_i}\left(\frac{A_i}{S_i}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{n^{3/2}}\frac{A}{S} = \frac{1}{n_i^{3/2}}\frac{A_i}{S_i} = \frac{\Sigma A_i}{\Sigma n_i^{3/2} S_i} = \frac{A}{\Sigma n_i^{3/2} S_i}$$

上式から n が以下のように求まる．

$$n = \left(\frac{\Sigma n_i^{3/2} S_i}{S}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (7)$$

式（7）を合成粗度係数という．これを用いて計算を行う．

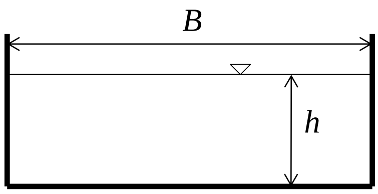
1-6　水理学的に有利な断面（教科書 pp. 77-78 参照）

水路床勾配 I，流水断面積（流積，河川の場合は河積）A，粗度係数 n が与えられたとき流量を最大にする断面形状のことを水理学的に有利な断面という．

$$Q = \frac{A}{n} R^{2/3} I^{1/2} = \frac{A}{n}\left(\frac{A}{S}\right)^{2/3} I^{1/2}$$

A，I，　n は与えられているので，変えることができるのは径深 R だけである．流量を最大にするには径深を最大にすればよい．径深は流積を潤辺で除したものであるので結局，潤辺を最小にすればよい．（潤辺が小さいということは，壁面摩擦抵抗力が小さいということである．）
円形が最も水理学的に有利な断面である．施工上の問題から台形，長方形断面が用いられる．

例題：
図に示すような幅 B 水深 h の矩形断面の水路がある。水理学的に最も有利な断面となるときの幅 B と水深 h との関係を求めよ。



正面図

水理学的に有利な断面は同一流積 A で潤辺が最小となっているので，まず矩形断面の潤辺 S を流積 A をも用いて表してみる．流積は $A = Bh$ であり，潤辺 S は $S = B + 2h$ であるので，両式から水面幅 B を消去する．

$$S = \frac{A}{h} + 2h = Ah^{-1} + 2h$$

潤辺を最小にする水深 h は

$\dfrac{dS}{dh} = \dfrac{d}{dh}\left(Ah^{-1} + 2h\right) = -Ah^{-2} + 2 = 0$ を満足する（流積 A は一定値であることに注意）．よって

$-Ah^{-2} + 2 = -\dfrac{A}{h^2} + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad h^2 = \dfrac{A}{2} = \dfrac{Bh}{2} \quad \rightarrow \quad h = \dfrac{B}{2}$　が得られる．