

開水路の定常流 (5) : 不等流と開水路の水面形

Steady open channel flow (5): non-uniform flow and profiles of channel flows

教科書 pp. 96-104

1. 不等流 (non-uniform flow)

1-1 不等流の説明

不等流：流下方向に水深，流速が変化する流れ。非定常であれば必ず不等流になる。

1-2 限界勾配 (critical slope)

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sin\theta - \frac{1}{\phi^2 g R} \left(\frac{Q}{A}\right)^2}{\cos\theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h}} \quad (1)$$

水面形方程式の分子=0 の条件から等流水深 h_0 が，分母=0 の条件から限界水深 h_c が求まる。

等流水深を規定する要因：

式 (1) より $\sin\theta - \frac{1}{\phi^2 g R} \left(\frac{Q}{A}\right)^2 = 0$ を満足する水深が等流水深

Manning の式より $\frac{Q}{\sqrt{i}} = \frac{A}{n} R^{2/3}$ (2) を満足する水深が等流水深

等流水深は流量 Q ，断面形状 (A , R)，粗度係数 n ，水路床勾配 i ($=\sin\theta$) で決定される。

限界水深を決定する要因：

式 (1) より $\cos\theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h} = 0$ (3) を満足する水深が限界水深

限界水深は流量 Q ，断面形状 (A , R)，水路床勾配 ($\cos\theta$) で決定される。限界勾配：流量，断面形状，粗度係数が与えられた場合，等流水深と限界水深が等しくなる水路床勾配が存在する。このような水路床勾配を限界勾配という。水路幅 B の一様長方形断面水路を考える。式 (3) は

$$\cos\theta - \frac{\alpha Q^2 B}{g A^3} = 0 \quad (4)$$

となる。式 (2) と式 (4) から流量 Q を消去すると

$$i_c = \cos\theta \frac{g n^2}{\alpha R^{4/3}} \frac{A}{B}$$

 $\cos\theta=1$ とすれば

$$i_c = \frac{g n^2}{\alpha R^{4/3}} \frac{A}{B} \quad (5)$$

Chezy の式で式 (5) を表せば

$$i_c = \frac{g}{\alpha C^2} \frac{A}{R B} \quad (6)$$

一様長方形断面水路において式 (5) または式 (6) が限界勾配 i_c を表す式である。開水路の勾配 i は限界勾配 i_c と比較して次のように分類できる。

$i < i_c$: 緩勾配 (mild slope) かんこうばい . . . 等流は常流となる.

$i > i_c$: 急勾配 (steep slope) . . . 等流は射流となる.

$i = i_c$: 限界勾配 (critical slope) . . . 等流は限界流となる.

【参考】単位幅流量で限界勾配を求める式：単位幅流量を q ，限界水深を h_c ，等流水深を h_0 とする．限

界勾配では限界水深と等流水深が等しくなるので次式が成立する． $h_c = h_0 = \left(\frac{\alpha q^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{nq}{I^{1/2}}\right)^{3/5}$

上式を整理し整理すると次式が求まる． $I = \frac{n^2 q^2}{h_c^{10/3}} = \frac{gn^2}{\alpha h_c^{1/3}} = \frac{g^{10/9} n^2}{\alpha^{10/9} q^{2/9}}$

1-3 水面形方程式

式 (1) の一様断面の水面形方程式を以下のように書き換える．

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &= \frac{\sin\theta - \frac{1}{\varphi^2 g R} \left(\frac{Q}{A}\right)^2}{\cos\theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h}} \rightarrow \frac{dh}{dx} = \sin\theta \frac{1 - \frac{1}{\varphi^2 g R \sin\theta} \left(\frac{Q}{A}\right)^2}{\cos\theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h}} \rightarrow \frac{dh}{dx} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \frac{1 - \frac{1}{\varphi^2 g R \sin\theta} \left(\frac{Q}{A}\right)^2}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g A^3 \cos\theta} \frac{\partial A}{\partial h}} \\ \rightarrow \frac{dh}{dx} &= i \frac{1 - \frac{1}{\varphi^2 g R \sin\theta} \left(\frac{Q}{A}\right)^2}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g A^3 \cos\theta} \frac{\partial A}{\partial h}} \rightarrow \frac{dh}{dx} = i \frac{1 - \frac{n^2 Q^2}{R^{4/3} A^2 \sin\theta}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g A^3 \cos\theta} \frac{\partial A}{\partial h}} \quad (7) \quad \text{または} \quad \frac{dh}{dx} = i \frac{1 - \frac{Q^2}{C^2 R A^2 \sin\theta}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g A^3 \cos\theta} \frac{\partial A}{\partial h}} \quad (8) \end{aligned}$$

ここで $i = \sin\theta / \cos\theta \doteq \sin\theta$ ($\cos\theta \doteq 1$) である．流速係数 φ は 1 ページに示したものを使用した．

$$K = \frac{1}{n} A R^{2/3} = C A R^{1/2} \quad : \text{通水能}$$

$$K_0 = \frac{Q}{\sqrt{i}} = \frac{Q}{\sqrt{\sin\theta}} \quad : \text{等流水深の通水能}$$

$$Z = \sqrt{\frac{A^3}{\partial A / \partial h}} \quad : \text{断面係数}$$

$$Z_c = \frac{\sqrt{\alpha Q}}{\sqrt{g \cos\theta}} \quad : \text{限界水深の断面係数}$$

上の記号を用いて式 (7) および式 (8) を書き換える．

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - \frac{K_0^2}{K^2}}{1 - \frac{Z_c^3}{Z^3}} \quad (9)$$

幅 B の広長方形水路では $A = Bh$ ， $R \doteq h$ となる．式 (9) は

$$\text{Manning の式の場合：} \quad \frac{dh}{dx} = i \frac{1 - \frac{h_0^{10/3}}{h^{10/3}}}{1 - \frac{h_c^3}{h^3}} \quad (10)$$

Chezy の式の場合：
$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - \frac{h_0^3}{h^3}}{1 - \frac{h_c^3}{h^3}} \quad (11)$$

ここで、 h_0 は等流水深、 h_c は限界水深である。
台形断面などの場合

$K^2 = C_1 h^N$ 、 $Z^3 = C_2 h^M$ が成立すると考えて
$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - \frac{h_0^N}{h^N}}{1 - \frac{h_c^M}{h^M}}$$

とする。係数 C_1 、 C_2 、 N 、 M は実験などで決める。

1-4 緩勾配の水面形の例

水面形方程式を積分すれば水面形が求まる。一階の常微分方程式なので積分定数が一つ現れる。これを決定するためには境界条件が一個必要である。

緩勾配の場合 ($h_0 > h_c$) : $h > h_0 > h_c$ の場合を考える。式 (10) の増減表は以下ようになる。

表-1 増減表

水深	h_0	\longrightarrow	$h \gg h_0, h_c$
dh/dx	0	+	i
	h_0 に漸近	水深の増加	水平

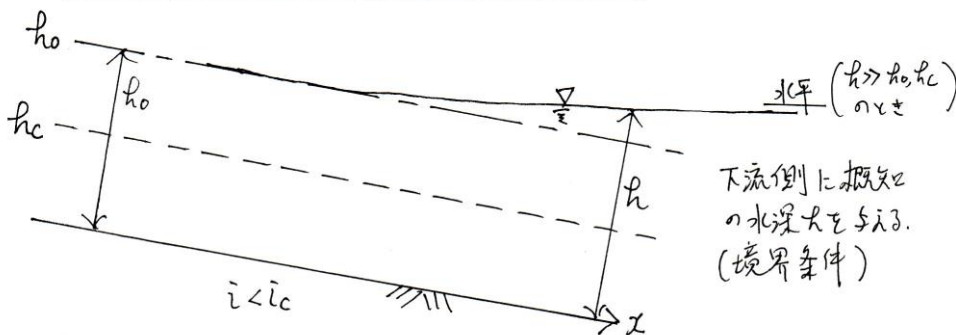


図-3 緩勾配水路の水面形の一例

1-5 緩勾配および急勾配の水面形

緩勾配および急勾配の水深変化の増減表は式(10)を用いて以下のように作成できる。

表 1: 水深変化についての増減表 (緩勾配水路: $h_c < h_0$ のとき)

h	$h < h_c$	$h = h_c$	$h_c < h < h_0$	$h = h_0$	$h_0 < h$
dh/dx	+	$+\infty$	-	0	+
水深は流れ方向に	深くなる	(特異点)	浅くなる	変わらない	深くなる

表 2: 水深変化についての増減表 (急勾配水路: $h_c > h_0$ のとき)

h	$h < h_0$	$h = h_0$	$h_0 < h < h_c$	$h = h_c$	$h_c < h$
dh/dx	+	0	-	∞	+
水深は流れ方向に	深くなる	変わらない	浅くなる	(特異点)	深くなる

増減表をもとに水面形の概略図を描くことができる。図-4, 5 に示す。 i は水路床勾配, F_r はフルード数である。

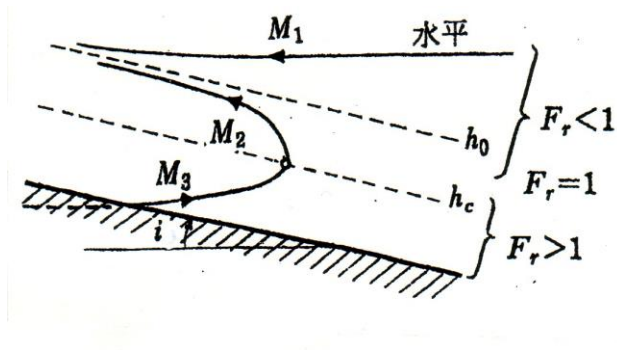


図-4 緩勾配水路 ($i < i_c$) の水面形

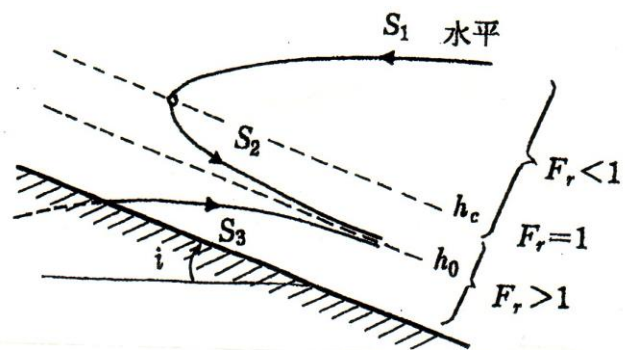


図-5 急勾配水路 ($i > i_c$) の水面形

注意: 流れは左から右に向かう。曲線の矢印は水面形が決定される方向 (境界条件の影響が伝わる方向) を示す。常流では下流側に、射流なら上流側に境界条件 (boundary condition) を与える。