静水圧（1）：静水圧分布，パスカルの原理，マノメーターの計算

Hydrostatic pressure (1): hydrostatic pressure distribution, principle of Pascal, Manometer

教科書 pp.9-11

1. 静水圧の式

運動している流体には外力として重力，圧力および粘性力（流体の分子粘性によるせん断力）が作用するが，流体が静止している場合（静水とよぶ）には粘性力が作用せず重力と圧力だけが作用する．静水中で作用する圧力を静水圧という．

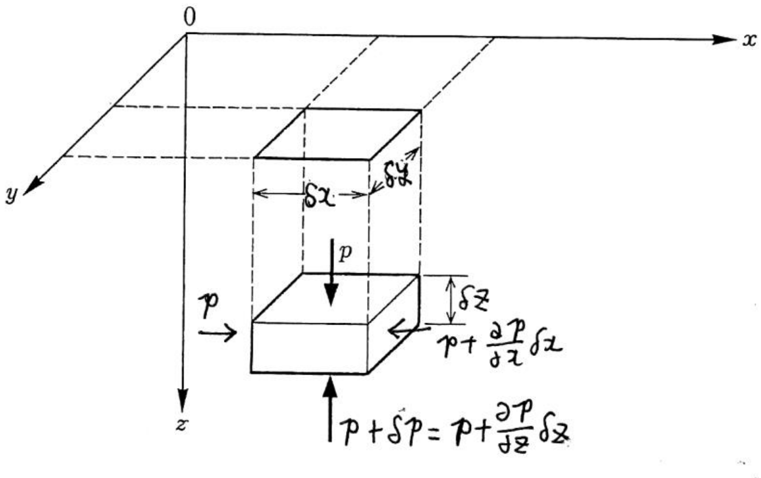


図-1　座標

静水圧の式を誘導しよう．座標を図-1 に示すようにとる．水面のある点を原点として水平方向にそれぞれ x, y 軸をとる．鉛直下向き（重力の方向，水深方向）に z 軸をとる．流体中に微少な体積を持つ立方体要素を考える．それぞれの辺の長さを δx, δy, δz とする．この立方体要素に働く鉛直方向の力を考えよう．

1) 立方体要素の上面に働く下向きの圧力：p

2) 立方体要素の下面に働く上向きの圧力：$-(p+\delta p)$　（注意：上向きなので符号はマイナス）

3) 立方体要素の自重：$\rho g \delta x \delta y \delta z$

立方体要素は静止している．すなわち力は釣り合っている（合力はゼロ）ので次式が成立する．

$$p\delta x\delta y+\rho g\delta x\delta y\delta z-\left(p+\delta p\right)\delta x\delta y=0 \tag{1}$$

Taylor 展開を用いれば $p+\delta p$ は以下のようになる．

$$p+\delta p=p+\frac{\partial p}{\partial z}\delta z$$

上式を式(1)に代入し，整理すれば次式を得る．

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\rho g \tag{2}$$

式(2)を不定積分すると

$$p=\rho gz+C \tag{3}$$

z=0（水表面）で p=p_0（大気圧）の条件より

$$p=\rho gz+p_0 \tag{4}$$

式(4)が静水圧の式である．静水圧は水深 z に比例することがわかる．さて，式(4)は大気圧 p_0 と流体による圧力（水圧）の合力であることがわかる．真空を基準にして大気圧と水圧の両方を考えた場合を絶

対圧（absolute pressure）という．水理学では大気圧は一定と見なすことが多い．この場合，大気圧を差し引いて水圧だけを考えるのが便利である．絶対圧 p から大気圧を引いたものを改めて p とすれば次式のようになる．

$$p - p_0 \rightarrow p = \rho g z \tag{5}$$

このように大気圧を基準にして水圧だけを考えた場合をゲージ圧（gage pressure）という．

同様に，水平方向の力の釣り合いを考える．水平方向では以下の力だけが作用している．

1) 立方体要素のある側面に働く圧力：p

2) 立方体要素の 1) の面と反対側の側面に働く圧力：$-\left(p+\delta p\right)=-\left(p+\dfrac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)$　（注意：向きは反対になるので符号はマイナス）

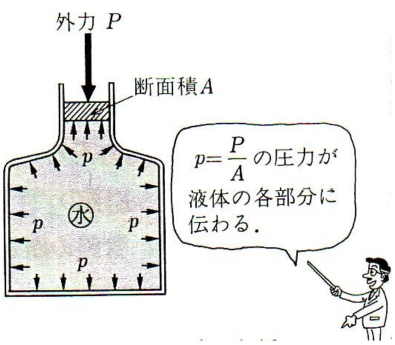
$$p\delta z\delta y - \left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\delta z\delta y = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

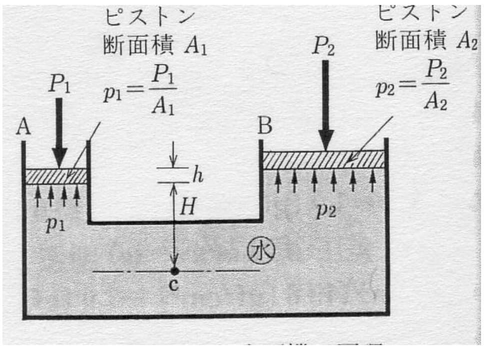
よって p=const.となる．y 方向も同様である．つまり水圧は水平方向には変化しない．

2.　パスカルの原理

パスカルの原理は「密封された液体の一部に圧力を加えると，その圧力は増減することなく液体の各部に伝わる.」である．液体は均一で連続しており非圧縮性であるので，液体を密閉した容器の一部に圧力を加えると，その圧力はすべての部分に同じ大きさで瞬時に伝わる（厳密には音速で伝わる．完全な非圧縮性流体では音速は無限大となる.）．この性質を応用したものが水圧機である．



図−2　パスカルの原理



図−3　水圧機

図−3 の c 点圧力を p_c とすると次のように表される．

$$p_c = \frac{P_1}{A_1} + \rho g H = \frac{P_2}{A_2} + \rho g\left(H+h\right)$$

上式は右側からの c 点に作用する圧力と左側から作用する圧力が等しいということを意味している．液体は静止していることから上式の正しさは証明される（もし，左右の圧力が異なれば液体は動き出す）．

$$\frac{P_1}{A_1} = \frac{P_2}{A_2} + \rho g h$$

ここでρgh が P/A と比較して十分小さいとすれば

$$\frac{P_1}{A_1} = \frac{P_2}{A_2} \quad \text{あるいは} \quad P_2 = \frac{A_2}{A_1}P_1$$

となる．A_1 と A_2 の面積比を大きくしておけば小さな力で大きな力を得ることができる．

3. 静水圧の性質

静水圧の性質には次の三つがある．

性質１　静水圧は面に対して垂直に作用する．

性質２　ある１点における静水圧はすべての方向に対して等しい（同じ大きさ）．

性質３　静水圧は水深に比例し，同一流体（つまり同一密度）において同一水平面上の静水圧はすべて等しい．

静水圧 p は単位面積あたりに作用し単位は Pa である（静水圧は法線応力）．また静水圧 p は水に接する面積全体に作用する．その面積全体に作用する水圧の合計を全水圧 P という（全水圧はある面に働く力で単位は N）．

4. 圧力計

U 字管に密度が異なる二つの液体を入れたところ，図-4 の状態で釣り合った．同一流体（同一密度）において同一水平面上の圧力はすべて等しいので，A-A 線上の圧力はすべて等しい．よって次式が成立する．点①の圧力と点②の圧力をそれぞれ p_1，p_2 とすれば

$$p_1 = \rho_1 g H_1 = p_2 = \rho_2 g H_2 \tag{9}$$

H_1 または（あるいは両者）H_2 を測定することで水圧を求めることができる．

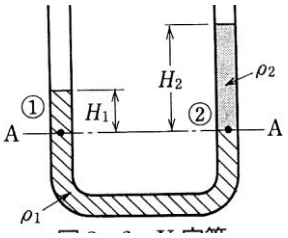


図-4　U 字管

図-5 のように管水路に細管を取り付け，細管内を上昇する水の高さにより水圧を求める．この細管をマノメーター（manometer）という．図-5 の(a)(b)(c)はそれぞれ容器（あるいは管路）内の圧力 p_A が普通の場合，小さい場合，大きい場合である．(b)はマノメーターが傾斜しているので傾斜マノメーター（tilting manometer）と呼ばれる．(c)は比重の大きい水銀を用いたマノメーターである．p_A はそれぞれ次式で与えられる．

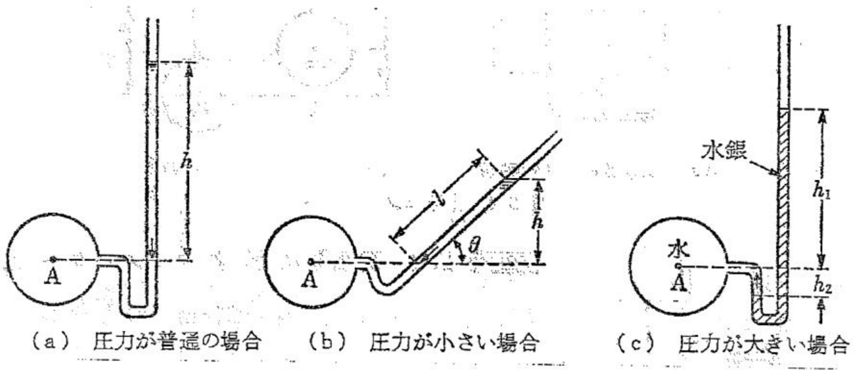


図-5　各種のマノメーター

(a) 圧力が普通の場合： $P_A = \rho g h$

(b) 圧力が小さい場合： $P_A = \rho g h = \rho g l \sin\theta$

(c) 圧力が大きい場合： $P_A = \rho_m g \left(h_1 + h_2\right) - \rho g h_2$

ここで，ρ_m は水銀の密度である．

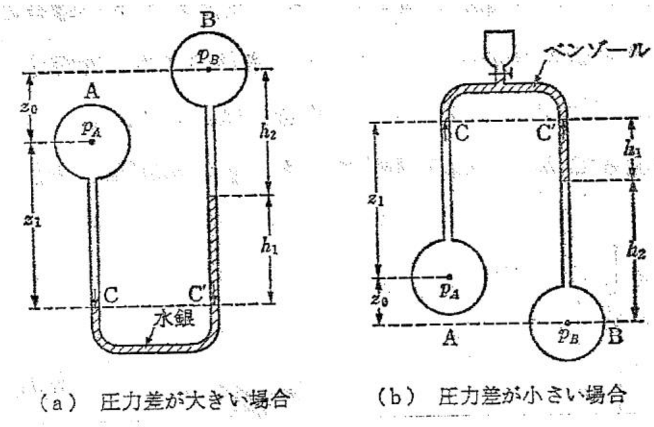


図-6　差圧マノメーター

図-6 は圧力差を計測する差圧マノメーターである．図-6(a)は圧力差が大きい場合に用いられ（水銀など比重の大きい液体を用いる），図-6(b)は圧力差が小さい場合に用いられる（ベンゾールなど比重の小さい液体を用いる）．

図-6(a)では C-C'面の圧力が等しいことを利用して圧力差が求められる．

$$
\begin{aligned}
&P_A + \rho g z_1 = P_B + \rho g h_2 + \rho_m g h_1 \\
&\Delta p = P_A - P_B = -\rho g z_1 + \rho g h_2 + \rho_m g h_1 = -\rho g z_1 + \rho g \left(z_0 + z_1 - h_1 \right) + \rho_m g h_1 \\
&= \rho g z_0 + \left(\rho_m - \rho \right) g h_1
\end{aligned}
$$

図-6(b)も同様に C-C'面の圧力が等しいことを利用して圧力差が求められる．

$$
\begin{aligned}
&P_A - \rho g z_1 = P_B - \rho g h_2 - \rho_b g h_1 \\
&\Delta p = P_A - P_B = \rho g z_1 - \rho g h_2 - \rho_b g h_1 = \rho g z_1 - \rho g \left(z_0 + z_1 - h_1 \right) - \rho_b g h_1 \\
&= \left(\rho - \rho_b \right) g h_1 - \rho g z_0
\end{aligned}
$$