

## 静水圧 (2) : 平板に作用する静水圧

## Hydrostatic pressure (2): hydrostatic pressure acting on a plane plate

教科書 pp.12-16

## 1. 静水圧の式

図-1 に示すように傾いた面 DE に作用する静水圧の合力 (全水圧)  $P$  とその作用点の位置を求めよう。水表面に原点  $O$  をとり、鉛直下向きに  $z$  軸をとる、傾斜した面に沿って  $s$  軸をとる。面 DE に作用する全水圧は次式のようになる。

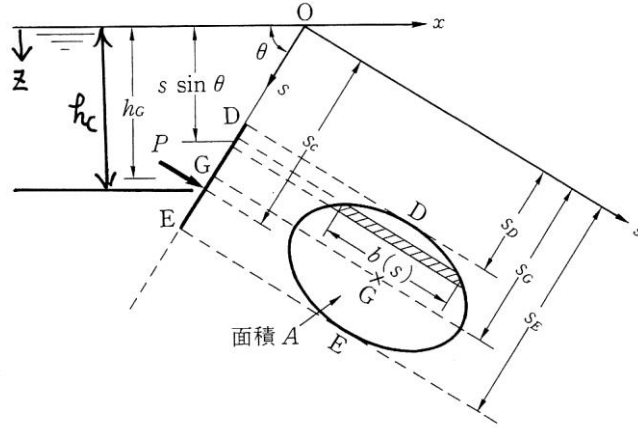


図-1 平板に作用する静水圧

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{s=s_D}^{s=s_E} \rho g s \sin \theta \cdot b(s) ds \\
 &= \rho g \sin \theta \int_{s=s_D}^{s=s_E} s b(s) ds \\
 &= \rho g s_G \sin \theta \cdot A \quad (1)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\rho$  は水の密度、 $g$  は重力加速度、 $\theta$  は水面に対する平板の傾斜角である。 $\rho g s \sin \theta$  は斜線部に働く静水圧であり、 $b(s) ds$  は斜線部の面積、 $A$  は平板の面積である。

$h_G = s_G \sin \theta$  の関係から

$$P = \rho g h_G A \quad (2)$$

ここで  $s_G$  は原点  $O$  から図心まで  $s$  軸に沿って測られた長さで、 $h_G$  は図心の位置までの水深である。

次にこの  $P$  の作用点までの斜距離  $s_C$  を求める。原点  $O$  に関する回転モーメントは以下のようになる。

$$P \cdot s_C = \int_{s=s_D}^{s=s_E} \rho g s \sin \theta \cdot b(s) ds \cdot s = \rho g \sin \theta \int_{s=s_D}^{s=s_E} b(s) s^2 ds \quad (3)$$

ここで  $I = \int_{s=s_D}^{s=s_E} b(s) s^2 ds$  とおく。これは断面二次モーメントに他ならない。よって、

$$s_C = \rho g \sin \theta \cdot \frac{I}{P} = \rho g \sin \theta \cdot \frac{I}{\rho g h_G A} = \frac{I}{s_G A} \quad (4)$$

これに  $I = I_G + A s_G^2$  を代入すると ( $I_G$  は図心に関する断面二次モーメント)

$$s_C = \frac{I}{s_G A} = \frac{I_G + A s_G^2}{s_G A} = s_G + \frac{I_G}{s_G A} = s_G + \frac{r^2}{s_G} \quad (5)$$

ここで  $r = \sqrt{I_G / A}$  は断面二次半径である。水深に換算すれば

$$h_C = s_C \sin \theta = \left( s_G + \frac{r^2}{s_G} \right) \sin \theta = s_G \sin \theta + \frac{r^2}{h_G / \sin \theta} \sin \theta = h_G + \frac{r^2}{h_G} \sin^2 \theta \quad (6)$$

平面に作用する全水圧の水平方向成分  $P_x$  および鉛直方向成分  $P_z$  は次のようになる。

$$P_x = P \sin \theta = \rho g h_G A \sin \theta, \quad P_z = P \cos \theta = \rho g h_C A \cos \theta$$

$A \sin \theta$  は平面を  $x$  軸に垂直な面に投影した面積 (投影面積) で、 $A \cos \theta$  は  $z$  軸に垂直な面に投影した面積である。鉛直平面の場合には  $\theta = \pi/2$  つまり  $\sin \theta = 1$ ,  $\cos \theta = 0$  とすればよい。

例題(1) 垂直平面に作用する静水圧

図-2 のように幅  $b$  の板が水深  $h$  の静止流体中に水面に対して垂直に置かれている。この板に働く全水圧  $P$  とその作用点  $h_C$  を求めよ。

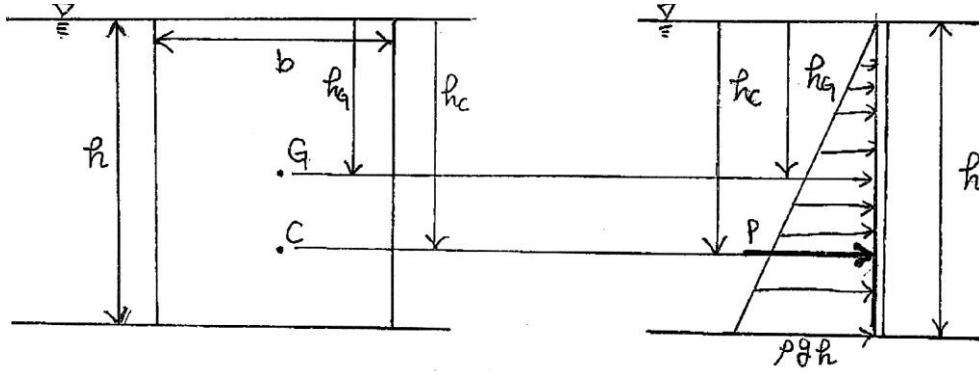


図-2 鉛直平面 正面図 (左) と側面図 (右)

答え 縦・横の長さが  $h$ ,  $b$  の矩形断面なので、図心までの水深  $h_G$ , 断面二次半径  $r$ , 断面積  $A$  はそれぞれ以下のようなになる。

$$h_G = h/2, \quad r = \sqrt{h^2/12}, \quad A = bh$$

これらを式(2)および式(6)に代入すると

$$P = \rho g h_G A = \rho g \frac{h}{2} bh = \rho g \frac{bh^2}{2} \tag{7}$$

$$h_C = h_G + \frac{r^2}{h_G} = \frac{h}{2} + \frac{h^2/12}{h/2} = \frac{2h}{3} \tag{8}$$

この例題のように幅方向に断面が変化しない場合、あるいは単位幅あたりの全水圧などを求める場合には以下のようにしても求めることができる。

板には三角形の圧力分布が作用している。全水圧はこの分布の面積と幅  $b$  の積である。

$$P = \frac{1}{2} \rho g h \cdot h \cdot b = \rho g \frac{bh^2}{2}$$

作用点は三角形分布の図心の位置である。

$$h_C = h - \frac{1}{3}h = \frac{2h}{3}$$

例題(2) 傾斜平面に作用する静水圧

図-3 のように幅  $b$  の板が水深  $h$  の静止流体中に水面に対して  $\theta$  の角度で置かれている。この板に働く全水圧  $P$  とその作用点  $h_C$  を求めよ。

答え 面に対して垂直な方向から見れば縦・横の長さが  $S$ ,  $b$  の矩形断面となる。この面に対して水面から図心までの  $S$  軸に沿う長さを  $S_G$  とする。断面二次半径  $r$ , 断面積  $A$  はそれぞれ以下のようなになる。

$$S_G = S/2, \quad r = \sqrt{S^2/12}, \quad A = bS$$

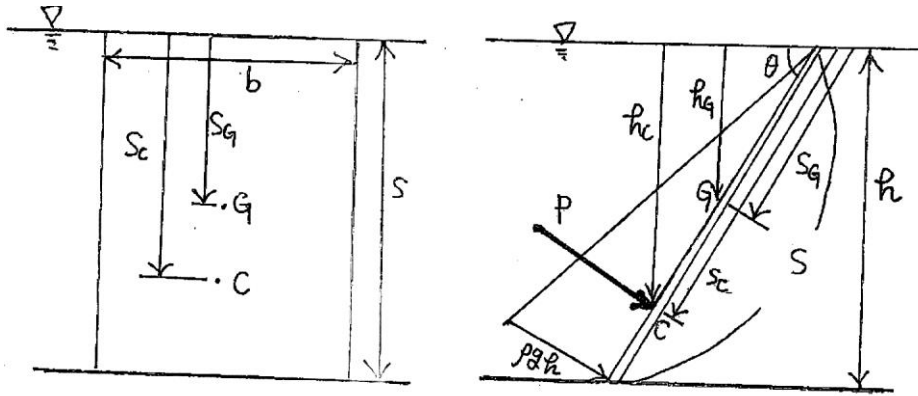


図-3 傾斜平面 正面図 (左) と側面図 (右)

式(1)および  $h=S\sin\theta$  の関係から

$$P = \rho g h_G A = \rho g S_G \sin\theta \cdot A = \rho g \frac{S}{2} \sin\theta \cdot bS = \rho g \frac{bS^2}{2} \sin\theta = \rho g \frac{bh^2}{2\sin\theta} \quad (10)$$

また式(5)から

$$S_C = S_G + \frac{r^2}{S_G} = \frac{S}{2} + \frac{S^2/12}{S/2} = \frac{2S}{3} = \frac{2h}{3\sin\theta} \quad (11)$$

静水圧分布の形状から直接求めれば

$$P = \frac{1}{2} \rho g h \cdot S \cdot b = \rho g \frac{bh^2}{2\sin\theta}$$

$$S_C = S - \frac{S}{3} = \frac{2S}{3} = \frac{2h}{3\sin\theta}$$

## 2. 曲面に作用する静水圧

例題(2)において平面に働く全水圧  $P$  の  $x$  方向 (水平方向) 成分を求めてみる.

$$P_x = P \sin\theta = \rho g \frac{bh^2}{2\sin\theta} \cdot \sin\theta = \rho g \frac{bh^2}{2} \quad (12)$$

これは水面に対し垂直に設置した場合の全水圧に等しい (例題(1)参照). 同様に全水圧  $P$  の  $z$  方向 (鉛直方向) 成分を求めてみる.

$$P_z = P \cos\theta = \rho g \frac{bh^2}{2\sin\theta} \cdot \cos\theta = \rho g \frac{bh^2}{2\tan\theta} \quad (13)$$

多少唐突であるが傾斜平面を底面として, その上にある水の重さ  $W$  を考えてみると

$$W = \rho g \cdot \frac{1}{2} h \frac{h}{\tan\theta} b = \rho g \frac{bh^2}{2\tan\theta} \quad (14)$$

よって,  $P_z=W$  であることがわかる, 天下りの説明であるが以下のことが言える.

「傾いた平面に働く全水圧の水平方向成分は, 平面を鉛直面に投影した面に働く全水圧に等しい」

「傾いた平面に働く全水圧の鉛直方向成分は, 平面を底面とした水柱の自重に等しい」

曲面は微少な傾斜した平面の集合体だと考えれば, 上記の性質がそのまま曲面にも当てはまる.

「曲面に働く全水圧の水平方向成分は曲面を鉛直面に投影した面に働く全水圧に等しい. その作用点は鉛直平面の場合と同じ。」

「曲面に働く全水圧の鉛直方向成分は曲面を底面とした水柱の自重に等しい. その作用点の位置は水柱の重心を通る鉛直線上にある。」

以上のことを式で表せば次のようになる。

曲面の面積を  $A$  とし,  $x, y, z$  方向の投影面積をそれぞれ  $A_x, A_y, A_z$  とすると, 曲面全体に作用する全水圧の3成分は次のようになる。

$$P_x = \int_{A_x} \rho g z dA_x = \rho g h_{Gx} A_x$$

$$P_y = \int_{A_y} \rho g z dA_y = \rho g h_{Gy} A_y$$

$$P_z = \int_{A_z} \rho g z dA_z = \text{曲面の上に乗る鉛直水柱の重さ}$$

ここに,  $h_{Gx}, h_{Gy}$  はそれぞれ  $A_x, A_y$  の図心までの水深である。全水圧は

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

となる。

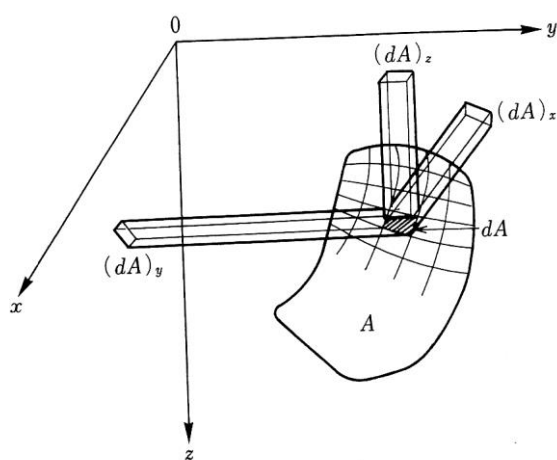


図-4 曲面に作用する静水圧