静水圧（3）：浮力，浮体の安定，相対的静止

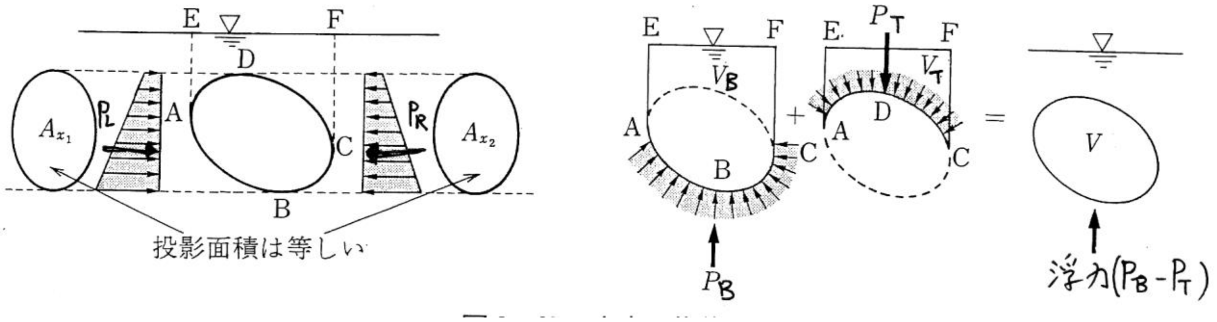
Hydrostatic pressure (3): buoyancy force, stability of floating body, relative equilibrium

教科書 pp.16-19

1. 浮力（buoyancy）

アルキメデスの原理

水中に物体 *ABCD* がある．この物体に働く全水圧（total pressure force）を考えてみよう．



図−1　物体に働く全水圧と浮力

左からの水平方向全水圧を P_L とし，右からのそれを P_R とする．全水圧の水平方向成分は水平軸に直交する面への投影面に作用する全水圧に等しい．図−1 に示すように右と左の投影面は同じなので，大きさが同じで方向が逆の全水圧が左右から働いている．つまり物体には水平方向の全水圧はキャンセルしあって作用しないことになる（水平方向の全水圧の合力はゼロ．$P_L=P_R$）．

次に鉛直方向の成分について考える．物体表面 ADC を底面とする水柱を考える．この水柱の体積を $V_T(EADCF)$ とする．この水柱の自重は物体表面 ADC 上に作用する鉛直方向の全水圧である．これを P_T とおくと

$$P_T=\rho g V_T \tag{1}$$

また物体表面 ABC を底面とする水柱を考える．この水柱の体積を $V_B(EABCF)$ とする．この水柱の自重は物体表面 ABC 上に作用する鉛直方向の全水圧である（方向は鉛直上向き）．これを P_B とおくと

$$P_B=\rho g V_B \tag{2}$$

物体 ABCD に作用する鉛直方向全水圧の合力を P_V とすれば

$$P_V= P_B - P_T =\rho g V \tag{3}$$

ここで V は物体 ABCD の体積となる．物体に作用する水圧の鉛直上向き成分を浮力という．つまり浮力は物体底面に鉛直上向きに作用する全水圧と上面に作用する鉛直下向きの全水圧の差である．浮力は物体が水面に浮かんでいる場合にも作用する．浮力は一般に次のように書ける．

$$B=\rho g V \tag{4}$$

ここで B は浮力（buoyancy force），ρは流体の密度（density），g は重力加速度（gravity acceleration），V は水面下の物体の体積（排水容積：displacement）である．浮力の作用線は水面下の物体の重心（浮心：center of buoyancy）を通過する．式(4)をアルキメデスの原理（*Archimedes' principle*）という．式(4)の意味を文章にすれば以下のようになる．

「水中にある物体は，それが排除した体積の水の重量に等しい浮力を受ける.」

2. 浮体の安定性（stability of floating body）

水面に浮かんでいる物体を浮体（floating body）という．図−2 のような物体 ABCD を考えよう．ここで G は物体の重心，C は浮心（A'BCD'の重心），W は物体の重量（自重），B は浮力，d は吃水（きっすい：draft）である．図−2 は浮体が静止している状態である．このような状態を釣り合いの状態（W=B）という．この時，浮心 C と重心 G は同一鉛直線上にある．

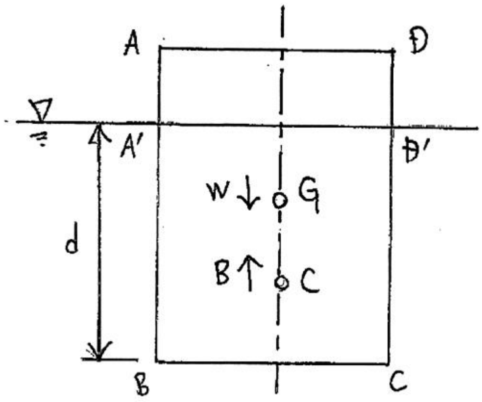
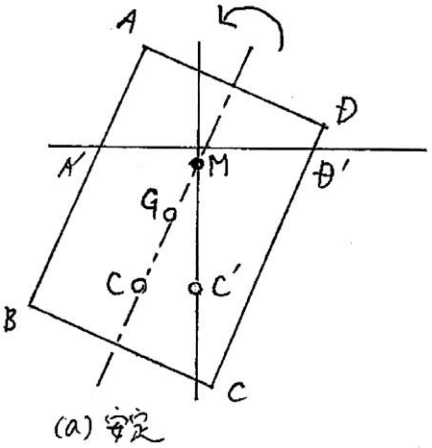


図 2: 浮体の静止



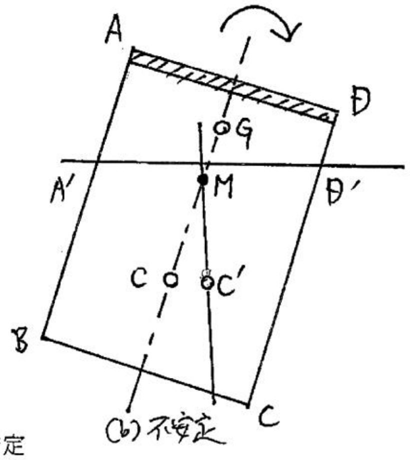
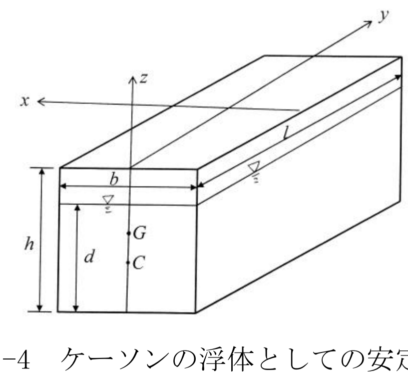


図 3: 浮体の安定・不安定

図−3(a)のように少し右に傾いた状態を考える．この時浮心は C から C’へ移動する．C’と G はもはや同一鉛直線上にはない．CG 線と C’の鉛直線の交点を M とする．M を傾心（metacenter）という．M が G よりも上方にあれば物体を左に傾けようとする偶力（回転モーメント）が生じる．物体は釣り合いの状態に戻ろうとする．浮体は安定（stable）である．

一方，図−3(d)のように AD 面におもりを入れて重心を上方にずらそう．この場合では傾心は G よりも下方にある．物体を右に傾けようとする偶力が働き，物体は倒れてしまう．物体は不安定（unstable）である．



図−4　ケーソンの浮体としての安定性

ケーソン（caisson）は防波堤などの水中構造物として良く使用されるコンクリート製または鋼製の大型の箱である．陸上の工場で制作され，船で曳航されて現場海域に運ばれる．このとき浮体としての安定性が求められる．図−4 のように， y 軸方向が x 軸方向よりも長い長方形断面をした立方体を考える．浮体の安定性は次式で求められる．

$$\overline{GM}=\frac{I_y}{V}-\overline{CG}$$

ここで $\overline{GM}$ は重心から傾心までの距離（鉛直上向きを正としている），$\overline{CG}$ は浮心から重心までの距離，$I_y=b^3l/12$ は y 軸に関する断面二次モーメント，V はケーソンの体積である．$\overline{GM}>0$ であれば安定（傾心が重心よりも上方にある），$\overline{GM}<0$ であれば不安定，$\overline{GM}=0$ であれば中立となる．

3.　相対的静止

　ある系が等加速度運動しているとき（加速度 0 の等速運動も含む），その系には慣性力（inertia force）が働いている．その系と同じ運動している座標系から観測すると慣性力は重力以外の質量力が作用していると感じられる（電車や車が急発進したとき，体が後ろに倒されることを思い出そう）．

　等加速度運動の系では慣性力と重力が釣り合って流体が静止しているように見える場合がある．これを相対的静止という（系外から観測すると流体は運動している．つまり静止していない.）．

質量力：流体の質量に比例する力で，流体の体積に作用する．密度が一定であれば体積力とも呼ばれる．圧力やせん断応力は面に働くので面積力と呼ぶ．

　相対的静止では水平方向にも質量力が働くので静水圧の式は以下のようになる．

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho X \quad (5),\qquad \frac{\partial p}{\partial y}=\rho Y \quad (6),\qquad \frac{\partial p}{\partial z}=\rho Z \quad (7)$$

ここで X，Y，Z はそれぞれ x，y，z 方向の質量力である．ちなみに X=Y=0，Z=g とすれば通常の静水圧の式となる．

　圧力 p を全微分（total derivative　：多変数関数の Taylor 展開）すると

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz \tag{8}$$

式（5）～（7）より式（8）は以下のようになる．

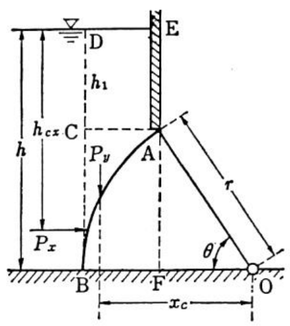
$$dp=\rho Xdx+\rho Ydy+\rho Zdz \tag{9}$$

式（9）をオイラー（Euler）の釣り合いの式という，dp=0（つまり p=const.）の面を等圧面（equi-potential surface）という．水表面は p=0 の等圧面である．

＊相対的静止の問題は後期の水理学Ⅱで詳しく学習する．

例題 1

右図に示すような半径 r，中心角θのラジアルゲートで上流側の水深を h とするとき，ゲートに作用する単位幅当たりの静水圧および作用点を求めよ．



解答：奥行きは 1 として考える（単位幅として考える）．水平方向の全水圧 P_x は曲面 AB を鉛直面に投影した面（CB 面）に働く全水圧となる．全水圧の公式 $P=\rho g h_G A$ を用いる．

$A=r\sin\theta\times1=r\sin\theta$，$h_G$=DC+CB/2=$h-r\sin\theta+1/2\ r\sin\theta=h-1/2\ r\sin\theta$

$P_x=\rho g h_G A=\rho g(h-1/2\ r\sin\theta)\ r\sin\theta=1/2\ \rho g(2h-r\sin\theta)\ r\sin\theta$

$=1/2\ \rho g(2h-h+h_1)(h-h_1)=1/2\ \rho g\ (h^2-h_1^2)$

ここで，$h_1=h-r\sin\theta$である．

P_x の作用点までの水深 h_{Cx} も公式で求める．$h_G=h-1/2\ r\sin\theta=(h+h_1)/2$，$I_G=1\times r\sin\theta^3/12=(h-h_1)^3/12$

$$h_{Cx} = h_G + \frac{I_G}{Ah_G} = \frac{h+h_1}{2} + \frac{(h-h_1)^3/12}{(h-h_1)\times(h+h_1)/2} = \frac{h+h_1}{2} + \frac{(h-h_1)^2}{6(h+h_1)} = \frac{3(h+h_1)^2+(h-h_1)^2}{6(h+h_1)} = \frac{2}{3}\frac{h^2+hh_1+h_1^2}{h+h_1}$$

鉛直方向の全水圧 P_y は曲面 AB を底面とする水柱の自重である．まず面積 A=□EABD の面積を求める．面積 EFBD から面積 ABF を差し引けばよい．また面積 ABF は扇形 AOB から三角形 AOF を引いたものなので,

$$面積AFB = \pi r^2 \frac{\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} r\sin\theta \cdot r\cos\theta = r^2\frac{\theta}{2} - \frac{r^2}{2}\sin\theta\cdot\cos\theta = r^2\frac{\theta}{2} - \frac{r^2}{2}\frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{r^2}{4}(2\theta - \sin 2\theta)$$

$$面積EABD = A_{EABD} = h(r - r\cos\theta) - \frac{r^2}{4}(2\theta-\sin 2\theta) = hr(1-\cos\theta) - \frac{r^2}{4}(2\theta - \sin 2\theta)$$

したがって，$P_y = \rho g \times (A_{EABD}\times 1) = \rho g\left\{hr(1-\cos\theta) - \frac{r^2}{4}(2\theta - \sin 2\theta)\right\}$

O 点はヒンジであるので，この点で回転モーメントは 0 となる．よって

$$P_x(h - h_{Cx}) - P_y \cdot x_C = 0$$
$$x_C = \frac{P_x(h-h_{Cx})}{P_y}$$

全水圧 P は $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$ を計算すれば良い．

例題 2

例題 1 と同一の半径 r，中心角 θ，水深 h をもつラジアルゲートが下図のように設置されている。例題 1 と異なるところを計算せよ．

解答：水平方向は例題 1 同じ．鉛直方向全水圧 P_y は ABCDE が排除した水の重量と同じ大きさの力（すなわち浮力）となる．**方向は鉛直上向き**．

$$面積EABD = A_{EABD} = 面積EACD + 面積ABC$$
$$= (h - r\sin\theta)\times(r - r\cos\theta) + \left(\pi r^2\frac{\theta}{2\pi} - \frac{1}{2}r\sin\theta\cdot r\cos\theta\right) = h_1 r(1-\cos\theta) + \frac{r^2}{4}(2\theta - \sin 2\theta)$$

$$P_y = \rho g\times(A_{EABD}\times 1) = \rho g\left\{h_1 r(1-\cos\theta) + \frac{r^2}{4}(2\theta-\sin 2\theta)\right\}$$