管水路の定常流（1）：管路定常流の基礎式，摩擦損失水頭と平均流公式

Steady pipe flow (1): basic equations for steady pipe flow, friction loss head and mean flow formulation

教科書 pp.33-41

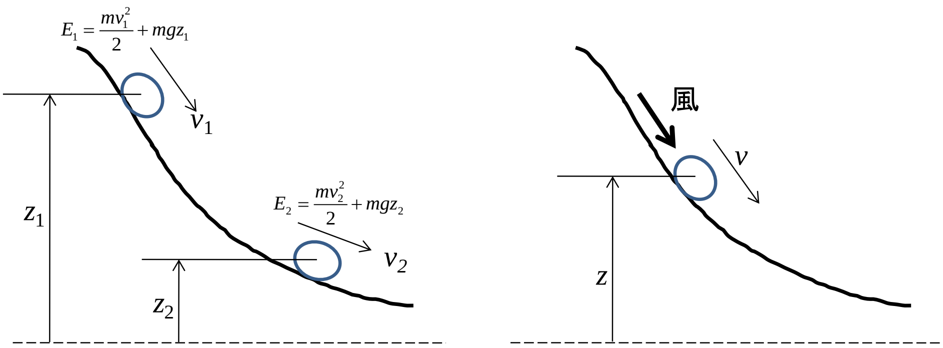
1.　ベルヌイの定理（Bernoulli's theory ）教科書 pp.26-27

質点力学の基礎原理として運動量保存の法則(law of conservation of　momentum)とエネルギー保存の法則(law of conservation of energy)があることは周知の通りである．流体の力学にもこの原理は適用される．質点力学のエネルギー保存の法則は以下の通りである．

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E = const.(\text{一定}) \tag{1}$$

ここで m は質点の質量，g は重力加速度，z は質点の基準面からの高さである．式(1)の左辺第 1 項は運動エネルギー(kinetic energy)，左辺第二項は位置エネルギー(potential energy)である．両者の和が質点の持つエネルギーE である．式(1)はエネルギーE が質点の運動の状況に関わらず常に一定に保たれることを表している．

例えば図-1(a)に示すような坂道を滑る物体を考えよう．**坂道と物体の間には摩擦は無いとする．**エネルギー保存の法則に従えば，高さ z_1 にある物体のエネルギーE_1 と高さ z_2 にある物体のエネルギーE_2 が等しい．



(a)摩擦のない坂道を滑り降りる物体　　(b)風を受ける（圧力による仕事）物体

図-1　エネルギー保存の法則の例

流体の運動では運動エネルギーと位置エネルギーの他に新たに圧力による仕事が加わる（ある流体粒子の周囲に別の流体粒子が存在しているため，粒子同士の衝突が生じる．これは力による仕事と考えて良い.）．図-1(b)のように物体に風が吹き付けているようなイメージである．式で書くと次式になる．

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho gz = E = const.(\text{一定}) \tag{2}$$

一般には式(2)をρg で除した形が用いられる．

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = E = const.(\text{一定}) \tag{3}$$

流体は定まった形を持たないので質量 m の代わりに密度ρを用いる．式(3)は流体の単位質量（つまり密度）あたりのエネルギーが保存されることを意味する．各項の次元は高さの次元となる．

左辺第一項は速度水頭(velocity head)，第二項は圧力水頭(pressure head)，第三項は位置水頭（あるいは高度水頭）(elevation head)と呼ばれる．この三者の和を全水頭(total head)または全エネルギー(total energy)と呼ぶ．

さて，流体において坂道に相当するものは何であろうか？これは流線(stream line)と呼ばれるものである．流線の定義は「各瞬間において，ある線上の任意の点での接線の方向と，その点の流速ベクトル

の方向が一致しているような線」である．水理学 I では定常状態を対象としているので，ここでは流体を構成する微少な粒子（流体粒子）が通過する道筋とイメージしておこう（厳密には，これは流跡線に相当する）．流体は流線上でエネルギーが保存されることになる．これを発見者の名前にちなんでベルヌイ（ベルヌーイと書くこともある）の定理（Bernoulli's theory ）と呼ぶ.

注意：流れを表すのに「流線」，「流脈線(streak line)」，「流跡線(pass line)」の三種類がある．これらはすべて定義の異なる線であるが，定常状態だとこれらは同じ線となる．詳細は水理学Ⅱの講義に譲る.

ここまでは摩擦の効果は全く考慮していない．実際には摩擦が存在しており，摩擦によってエネルギーが失われる．現実の世界では式(1)あるいは式(2)は成立しない．しかしながら，摩擦や何らかの理由で失われたエネルギーをΔE とすると式(2)は以下のように書くことができる.

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z+\Delta E=const.(\text{一定}) \qquad (4)$$

つまり失われたエネルギーまでを考えればエネルギー保存の法則は常に成立する．なお，式(4)においても全水頭 E は左辺の第 1，2，3 項の和である（ΔE は含めない）.
＊式(3)の厳密な誘導やこの式を用いた演習問題は水理学Ⅱで学習する.

2.　乱流と層流　教科書 p.34

流体の流れ方には乱流と層流の二種類がある．教科書 p.185 図 5・15 に示すように管の中にインクを流した場合を考えよう．インクが一筋の線として整然と流れる状態が層流である．一般に流速が小さいときに発生する．流速が大きくなると管の中に大小様々な渦が発生しインクがぼやけてしまう．この状態が乱流である．河川や風などほとんどの自然界の流れは乱流状態である．今後水理学 I では流れは乱流であることを前提とする.

3.　一次元解析　教科書 pp.33-35

水理学が対象とする流れは上水道や下水道などの管路流れ，河川のような水面を持つ流れである．これらは三次元的（空間）な広がりを持ち，また時間的に変化する．つまり空間座標の x，y，z と時間 t の関数となる．しかし，管路や河川はある一方向（上流から下流の方向）の流れが卓越しており，詳細な三次元的な流速や断面内の詳細な流速分布を知る必要がない場合が多い．つまり，断面平均流速や流量が分かれば水工学的に十分なことが多い．断面平均流速や流量は時間と流下方向の座標 x だけの関数となる．このような解析方法を一次元解析という．定常（steady）状態であれば時間にも関係しなくなる．このときは流下方向の座標 x だけの関数となる.

一次元解析では管路あるいは河川そのものが一本の流線として考えることになる.

4.　**管水路定常流の基礎方程式**　教科書 pp.35-40

連続の式（質量保存の法則に相当する）

$$Q=vA=\text{一定} \qquad (5)\ \text{重要！}$$

ここで，A は流水断面積，v は断面平均流速，Q は流量である.
エネルギーの式（エネルギー保存の法則）

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}+z+\frac{p}{\rho g}\right)=-\frac{\tau_0}{\rho g R} \qquad (6)$$

αはエネルギー補正係数，τ_0 は壁面せん断応力，R は径深，z は基準面から管中央までの高さ，$p/\rho g$ は圧力水頭である．$z+p/\rho g$ をピエゾ水頭と呼ぶ．エネルギー補正係数は 1.1 程度の値をとるが，1.0 として

取り扱う場合も多い．

$\dfrac{\tau_0}{\rho} \equiv \dfrac{f}{8} v^2$ の関係を式（6）に代入して整理すると次式を得る．

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}+z+\frac{p}{\rho g}\right)=-\frac{\tau_0}{\rho g R}=-\frac{f v^2}{8gR}=-\frac{f}{4R}\frac{v^2}{2g} \qquad (7)\ \text{重要！}$$

式（5）と式（7）が管路定常流の基礎方程式である．未知量は v と p で式は２個ある（式（6）のままでは未知量に τ_0 が加わり，未知量３個，式２個となり方程式系が閉じない）．

式（7）の左辺は流体が持つエネルギーの流下方向の変化率（エネルギーの減少率）を表し，右辺は壁面摩擦による単位長さ当たりのエネルギー損失率を表す．

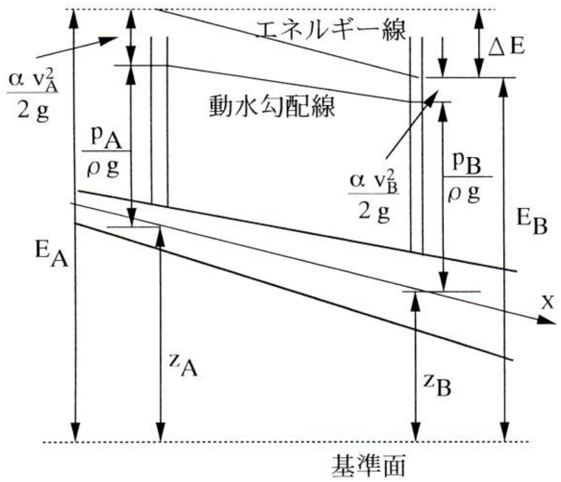


図-2　エネルギー線と動水勾配線

摩擦によるエネルギー損失（energy loss due to friction）

管路に沿う２点 A，B 間で式（7）を積分する．管路の場合，径深 R は $D/4$（D は管の直径）であるので次式を得る．

$$\int_A^B \frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}+z+\frac{p}{\rho g}\right)dx=-\int_A^B \frac{f}{4R}\frac{v^2}{2g}dx=-\int_A^B \frac{f}{D}\frac{v^2}{2g}dx$$

$$\left[\frac{\alpha v^2}{2g}+z+\frac{p}{\rho g}\right]_A^B=E_B-E_A=-\int_A^B \frac{f}{D}\frac{v^2}{2g}dx$$

$$E_A-E_B=\Delta E=h_f=\int_A^B \frac{f}{D}\frac{v^2}{2g}dx \qquad (8)$$

ここで，E_A は A 点の全エネルギー水頭，E_B は B 点の全エネルギー水頭，ΔE は AB 間で失われたエネルギー（エネルギー差，エネルギー損失），h_f は摩擦損失水頭である．この例ではエネルギーを失う機構は壁面摩擦しかないので $\Delta E= h_f$ となる．

AB 間の長さを l，D 一定の同一径管路（v が一定となる）でさらに f が一定であるとすれば，式（4）は以下のようになる．

$$h_f=\int_A^B \frac{f}{D}\frac{v^2}{2g}dx=\frac{f}{D}\frac{v^2}{2g}\int_A^B dx=f\,\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g} \qquad (9)\ \text{重要！}$$

式（9）を Darcy-Weisbach（ダルシー・ワイズバッハ）の式という．

各種勾配線の説明

$$動水勾配(hydraulic\ gradient)I：\ I=-\frac{d}{dx}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)$$

$$エネルギー勾配(energy\ gradient)I_e：\ I_e=-\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}+z+\frac{p}{\rho g}\right)$$

管径 D が一定（流量一定なので流速も一定になる）の場合は動水勾配とエネルギー勾配が等しくなる．

$$I=I_e=\frac{\Delta E}{l}$$

動水勾配線（hydraulic grade line）はピエゾ水頭（$z+p/\rho g$）を流れ方向につなげた線．
エネルギー線（energy line）は全水頭（全エネルギー）を流れ方向につなげた線．

形状損失（form loss）

ここまでは摩擦によるエネルギー損失だけを考えたが，実際には管の曲がりや断面の変化による局所的な損失が管路に沿って存在する．管路の形状の変化によって生じる損失を形状損失という．形状損失水頭 h は一般に次のように表す．

$$h=\xi\frac{v^2}{2g} \qquad (10)$$

v は損失発生地点の前後において流速の大きい方(管径の小さい方)を用いる．ξを形状損失係数という．

摩擦損失と形状損失を考慮したエネルギー損失

管路の AB 区間の摩擦損失と形状損失を考慮したベルヌイの式は

$$E_A-E_B=\Delta E=h_f+\sum_{i=1}^{N}h_i=\int_A^B\frac{f}{4R}\frac{v^2}{2g}dx+\sum_{i=1}^{N}\xi_i\frac{v_i^2}{2g} \qquad (11)$$

$$=\int_A^B\frac{f}{D}\frac{v^2}{2g}dx+\sum_{i=1}^{N}\xi_i\frac{v_i^2}{2g} \qquad (12)$$

となる．式（11）は任意形状断面の管路に対して成立する一般的な基礎式である．式（12）は円管に対する基礎式である．（式（11）の理解が重要）

管径 D および摩擦損係数 f が一定で，長さ l の単一管路で管長が十分長く，形状損失が無視できる場合には，式（12）は以下のように簡単化される．

$$E_A-E_B=\Delta E=h_f=\int_A^B\frac{f}{D}\frac{v^2}{2g}dx=\frac{f}{D}\frac{v^2}{2g}\int_A^B dx=f\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g} \qquad (13)$$

式（13）を変形して

$$v=\sqrt{\frac{2}{f}}\sqrt{gDI}=\sqrt{\frac{8}{f}}\sqrt{gRI} \qquad (14)$$

ここで $I=\Delta E/l=h_f/l$ である．

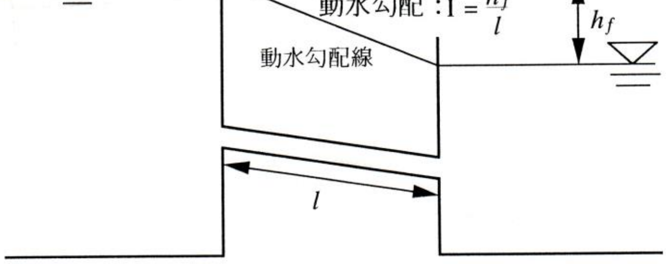


図-3　動水勾配線