摩擦損失係数と平均流公式　教科書 pp.42-45

Darcy-Weisbach の式とそれを変形した式を以下に記す．

$$h_f = f\frac{l}{4R}\frac{v^2}{2g} = f\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g} \quad (1) \qquad v = \sqrt{\frac{2}{f}}\sqrt{gDI} = \sqrt{\frac{8}{f}}\sqrt{gRI} \quad (2)$$

h_f は摩擦損失水頭，f は摩擦損失係数，D は管径，R は径深（流水断面積を潤辺で除したもの），g は重力加速度，l は管路長である．h_f は f，D，l が与えられているときに断面平均流速 v（または流量 Q）で水を流すために必要な落差と解釈できる（図-1 参照）．

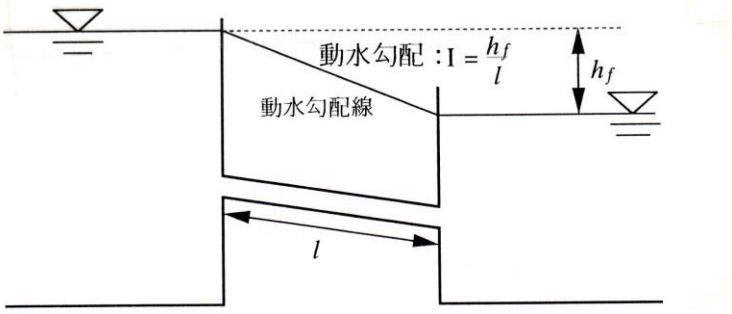

図-1

摩擦速度 u_*（教科書 p.43 参照）

管路の水は圧力と重力で流れ，周囲の管壁の摩擦によってその流れに抵抗が生じる．この抵抗を壁面摩擦（wall friction）あるいは壁面せん断力（wall share stress）τ_0 と呼ぶ．壁面せん断力は流速の自乗に比例することより，$\frac{\tau_0}{\rho} \equiv \frac{f}{8}v^2$ と書くことができる．これを少し変形すると $v = \sqrt{\frac{8}{f}}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ ．となる．式(2)と比較すると次式を得る．

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{gRI} = u_* \quad (3) \quad 重要$$

式(3)を摩擦速度（friction velocity）u_* とよぶ．**式(3)の物理的意味は壁面せん断応力である**が速度の次元を持つため，速度という語がついている（**実際は速度ではないので注意すること**）．

摩擦損失係数 f の決定

Colebrook の式（半理論的な式である．教科書 p.43 式（2・32）を参照）は次式で表される．

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.74 - 2\log_{10}\left(\frac{2k_s}{D} + \frac{18.7}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) = 1.74 - 2\log_{10}\frac{2k_s}{D} - 2\log_{10}\left(\frac{3.31}{u_* k_s/\nu} + 1\right) \quad (3)$$

ここでは k_s 相当粗度（equivalent roughness；管壁の粗さ（凹凸）を代表する高さ），D は管径，Re はレイノルズ数（Reynolds number；Re=vD /ν），u* は摩擦速度，ν は動粘性係数である．この式は理論的にも妥当であり，精度も優れている．

平均流公式（mean flow formulation）

式(2)の代わりに従来から多くの経験式（実験式）が提案されている．

Manning（マニング）の式

$$\boxed{v = \frac{1}{n}R^{2/3}I^{1/2} \qquad （あるいは\quad Q = \frac{A}{n}R^{2/3}I^{1/2}） \qquad （4）特に重要な式！}$$

ここで，v は断面平均流速（m/sec），n は Manning の粗度係数（s/m$^{1/3}$），I（=h_f/l）は動水勾配（－），R は径深（m），Q は流量（m^3/sec），A は流水断面積（流積）（m^2）である．

注意：Manning の粗度係数は[L$^{-1/3}$T]の次元を持つ係数である．単位は必ず m，s を使用しなければいけない．

同様の式に次の **Chezy（シェジー）の式**がある.

$$v = C\sqrt{RI} \qquad (5)$$

ここで，C は Chezy の粗度係数（$m^{1/2}/s$）である．この式も単位に m，s を使用する．

　平均流公式では摩擦損失係数 f（無次元）の代わりに，粗度係数（有次元）を与える必要がある．

粗度係数と摩擦損失係数の関係

　式（4）と式（2）を比較すると次式をえる．

$$v = \frac{1}{n}R^{2/3}I^{1/2} = \frac{R^{2/3}}{n\sqrt{gR}}\sqrt{gRI} = \frac{R^{1/6}}{n\sqrt{g}}\sqrt{gRI} = \sqrt{\frac{8}{f}}\sqrt{gRI} \qquad (6)$$

$$\boxed{f = \frac{8gn^2}{R^{1/3}} \qquad (7)}$$

同様に式（5）と式（2）の比較を行うと次式を得る．

$$v = C\sqrt{RI} = \frac{C}{\sqrt{g}}\sqrt{gRI} = \sqrt{\frac{8}{f}}\sqrt{gRI} \qquad (8) \qquad\qquad f = \frac{8g}{C^2} \qquad (9)$$

Manning の粗度係数 n と Chezy の粗度係数 C の関係は $C = \dfrac{R^{1/6}}{n}$ となる．

3. Manning の式の水理学的意味づけ（粗度係数 n と相当粗度 k_s の関係づけ）

　Manning の式や Chezy の式は多くの実験や観測結果を基にして得られた経験的な式で，当初は明確な水理学的根拠が希薄であった．その後 Manning の式の水理学的裏付けが試みられた．ここでは以下のようにして Manning の式の水理学的意味を考える．

　式（6）はレイノルズ数 Re には無関係なので完全粗面の場合の Colebrook の式と比較可能である．

$$v = \frac{R^{1/6}}{n\sqrt{g}}\sqrt{gRI} = \frac{R^{1/6}}{n\sqrt{g}}u_* \quad \rightarrow \quad \varphi \equiv \frac{v}{u_*} = \frac{R^{1/6}}{n\sqrt{g}} = \frac{k_s^{1/6}}{n\sqrt{g}}\frac{R^{1/6}}{k_s^{1/6}} = \frac{k_s^{1/6}}{n\sqrt{g}}\left(\frac{R}{k_s}\right)^{\frac{1}{6}} \qquad (10)$$

ここで，φは流速係数（断面平均流速 v と摩擦速度 u_*の比），u_*は摩擦速度，k_s は相当粗度である．

完全粗面の Colebrook の式（式（3）において Re→∞，D=4R とおく）は $\dfrac{1}{\sqrt{f}} = 1.74 - 2\log_{10}\dfrac{k_s}{2R}$ となる．

これを変形していくと

$$\varphi \equiv \frac{v}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \sqrt{8}\times\left(1.74 - 2\log_{10}\frac{k_s}{2R}\right) = 6.62 + 5.66\log_{10}\frac{R}{k_s} \qquad (11)$$

式（10）と式（11）から R/k_s を消去すると

$$\frac{k_s^{1/6}}{n\sqrt{g}} = \varphi\times\left(10^{\frac{\varphi-6.62}{5.66}}\right)^{-\frac{1}{6}} \qquad (12)$$

教科書 p.45 の図 2.8 の実線が式（12）のグラフである．8≦φ≦15 の範囲では式（12）はほぼ一定と見なせる．

$$\frac{k_s^{1/6}}{n\sqrt{g}} = 7.66 \qquad (13)$$

式（13）を Manning-Stricler（マニング・ストリクラー）の式という．Manning の粗度係数 n は管路の材質（すなわち相当粗度 k_s）だけで決定される．式（10）から次式が得られる．

$$\varphi \equiv \frac{v}{u_*} = 7.66\left(\frac{R}{k_s}\right)^{\frac{1}{6}} \qquad\qquad f = 0.136\left(\frac{k_s}{R}\right)^{\frac{1}{3}} = 0.216\left(\frac{k_s}{D}\right)^{\frac{1}{3}}$$