管水路の定常流（2）：形状損失

Steady pipe flow (2): form loss

教科書 pp.47-51

準備：運動量保存の法則（運動量の定理）

流体は具体的な形を持たないが，図のように流体中の任意の部分を考える．これを検査体積（control volume）と呼ぶ．検査体積を V とし，流体の密度をρとすると質量はρVである．この検査体積を仮想的な流体の塊と見なし，これにニュートンの第二法則を適用する．検査体積に働く外力はその表面に働く圧力およびせん断力（これらは表面力と呼ばれる）と検査体積の自重（これを質量力と呼ぶ）である．表面力の内，検査体積の仮想面に働く表面力の合力を$\vec{G}$，固体壁から検査面に働く表面力の合力を$\vec{K}$，検査面の質量力を$\vec{X}$とする（これらはいずれもベクトルである）．

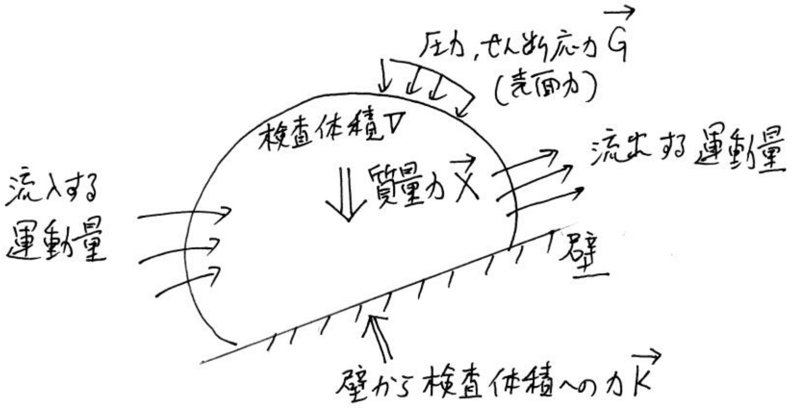

図　検査体積

質点力学とは異なり流れによって運動量が検査体積に流入・流出する．単位時間あたりの運動量の流入量を $\rho Q_{in}\overrightarrow{v_{in}}$，単位時間あたりの運動量の流出量を $\rho Q_{out}\overrightarrow{v_{out}}$ とする．以上より，以下の式が成立する．

$$\rho V\vec{a} = \rho Q_{in}\overrightarrow{v_{in}} - \rho Q_{out}\overrightarrow{v_{out}} + \overrightarrow{X} + \overrightarrow{G} + \overrightarrow{K} \tag{A}$$

は検査体積の加速度である．定常状態を考えると加速度は 0（速度の時間変化はない）となるため，左辺は 0 となる．また定常では流量も一定となるので式（A）は以下のようになる．
（教科書 pp.28-30 参照）

$$0 = \rho Q_{in}\overrightarrow{v_{in}} - \rho Q_{out}\overrightarrow{v_{out}} + \overrightarrow{X} + \overrightarrow{G} + \overrightarrow{K} \tag{B}$$

＊運動量の定理の詳細は水理学Ⅱで学習する．ここでは運動量の定理の結果（式（B））だけを用いる．

1. 形状損失（form loss ）

壁面の摩擦抵抗によるエネルギー損失　→　摩擦損失
局所的な管路断面の変化や曲がりなどによるエネルギー損失　→　形状損失，局所損失

管の形状の変化　→　渦の発生　→　分子粘性による熱の発生　→　エネルギーの損失

$$h = \xi\frac{v^2}{2g} \tag{1}$$

ここで h は形状損失水頭，v は断面平均流速，g は重力加速度，ξは形状損失係数である．質点の基準面からの高さである．v が断面の前後で変化する場合，断面の前後に関係なく流速の早い方を用いる．

(a)急拡（sudden enlargement）

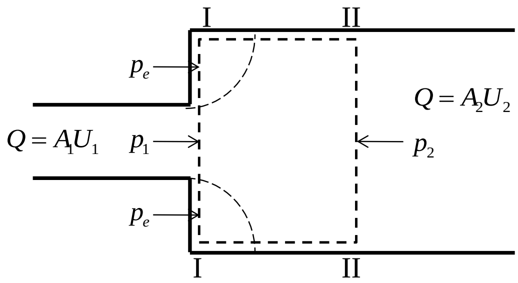

図-1　急拡管

運動量の定理から急拡の場合の形状損失係数を求める（教科書 p.47 参照）．断面Ⅱの面積を A_2，左側の細い管の断面積を A_1，断面Ⅰの壁面の面積を A_e(=A_2-A_1) とする．また断面Ⅰの壁面での圧力を p_e，細管との結合部での圧力を p_1，断面Ⅱの圧力を p_2 とする．さらに細管内の流速を v_1，断面Ⅱでの流速を v_2 とする．運動量の定理を適用すると次式を得る．

$$0 = \rho Q(v_1 - v_2) + A_1 p_1 + A_e p_e - A_2 p_2 = \rho Q(v_1 - v_2) + A_1 p_1 + \left(A_2 - A_1\right) p_e - A_2 p_2$$

p_e≒p_1 と考えられる．このことを考慮して上式を整理すると

$$0 = \rho Q(v_1 - v_2) + A_1 p_1 + \left(A_2 - A_1\right) p_e - A_2 p_2 = \rho Q(v_1 - v_2) + A_1 p_1 + \left(A_2 - A_1\right) p_1 - A_2 p_2$$

$$= \rho Q(v_1 - v_2) + A_2 p_1 - A_2 p_2 \qquad (1)$$

連続の式 $Q= v_1 A_1= v_2 A_2$ および式（1）から流量 Q を消去すれば次式を得る．

$$\rho Q(v_2 - v_1) = A_2\left(p_1 - p_2\right)$$

$$v_2(v_2 - v_1) = \frac{p_1 - p_2}{\rho} \qquad (2)$$

断面Ⅰと断面Ⅱのエネルギー差は

$$\Delta E = \left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}\right) = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \qquad (3)$$

式（2）と連続の式を用いて式（3）を整理すれば

$$\Delta E = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + \frac{v_2(v_2 - v_1)}{g} = \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g}$$

$$= \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \left(v_1 - \frac{A_1}{A_2}v_1\right)^2 \frac{1}{2g} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \xi_{se}\frac{v_1^2}{2g} \qquad (4)$$

よって急拡による損失水頭 h_{se}，損失係数ξ_{se} は以下の通りである．

$$h_{se} = \xi_{se}\frac{v_1^2}{2g} \qquad \xi_{se} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

補足：連続の式より $v_1 > v_2$ である．これを式（2）に代入すれば $v_2(v_2 - v_1) = \dfrac{p_1 - p_2}{\rho} < 0$ となる．つまり $p_1 < p_2$ であり，下流側の圧力が高いことが分かる（圧力水頭は下流側の方が大きい）．このため局所的に逆流が生じ，渦が発生し大きなエネルギー損失が生じる．

(b)急縮（sudden contraction）

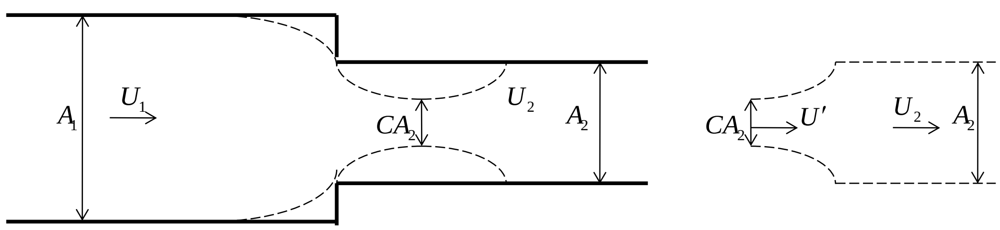

図-2　急縮管

図-2 に示すように細管内で縮流が生じ，再び流れが拡大する．流線の形状で見ると（図-2 の右図），細管内で急拡の状況になっていることが分かる．したがって，急拡の損失係数の公式が使用できる．急縮部分の断面積を CA_2 とし，その断面を通過する流速を v' とする．細管の断面積を A_2，細管内の流れが回復した場所での流速を v_2 とする．C は縮流係数である．

$$h_{sc} = \left(1 - \frac{CA_2}{A_2}\right)^2 \frac{v'^2}{2g} = \frac{(1-C)^2}{C^2}\frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \xi_{sc}\frac{v_2^2}{2g} \qquad (5)$$

式（5）の展開には連続の式から得られる $v' = v_2/C$ を用いている．
よって，急縮による損失水頭 h_{sc}，損失係数 ξ_{sc} は以下の通りである．

$$h_{sc} = \xi_{sc}\frac{v_2^2}{2g} \qquad \xi_{sec} = \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2$$

C は教科書 p.49 表 2.1 を参照

(c)出口（out）（管から広い水槽に出る場合）

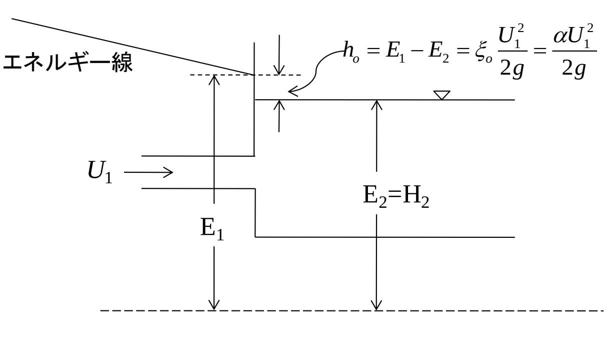

図-4　出口付近におけるエネルギー線

出口の前後でベルヌイの定理を適用する（図-4 参照）．

$$h_o = \xi_o \frac{v_1^2}{2g} = E_1 - E_2 = \left(\frac{\alpha v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{\alpha v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2\right)$$

ここで，水槽の流速 v_2 は 0 としてよい．また出口近傍では $\frac{p_1}{\rho g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+z_2=H_2=E_2$ と考えて良い．従って，上式は

$$h_o=\xi_o\frac{v_1^2}{2g}=E_1-E_2=\left(\frac{\alpha v_1^2}{2g}+H_2\right)-H_2=\frac{\alpha v_1^2}{2g}$$

となる．つまり $\xi_o=\alpha$ となる．$\xi_o=\alpha=1.0$～1.1 程度である（ $\alpha=1.0$ とすることが多い）.
（出口近傍で運動エネルギーが散逸する.）

(d)入り口（entrance）（広い水槽から管路への流入）

急縮の $A_1\to\infty$ の場合に相当する．管内流速を v とすると，

$$h_e=\xi_e\frac{v^2}{2g}$$

ξ_e は入り口形状で異なる．教科書 p.50 図 2.13 参照

(e)漸拡（gradual enlargement）

急拡の場合に補正係数 ξ_{ge} を加える． $h_{ge}=\xi_{ge}\xi_{se}\frac{v_1^2}{2g}$

(f)その他

漸縮・・・流線の剥離は起こらないので漸縮による損失は小さい．実用では漸縮による損失は無視する．
曲がり，屈折，バルブなど・・・実験的に損失係数が決められる．教科書や他の参考書を参照