

管水路の定常流 (3) : 単線管路の計算

Steady pipe flow (3): computation of single pipe

教科書 pp.51-59

1. 単線管路の解析

最も基本的な管路計算の問題として、上部貯水槽から一本の管路がのびており、種々のタイプの抵抗や断面変化部を通して下部の水槽に流下している場合を考える (図-1 参照)。

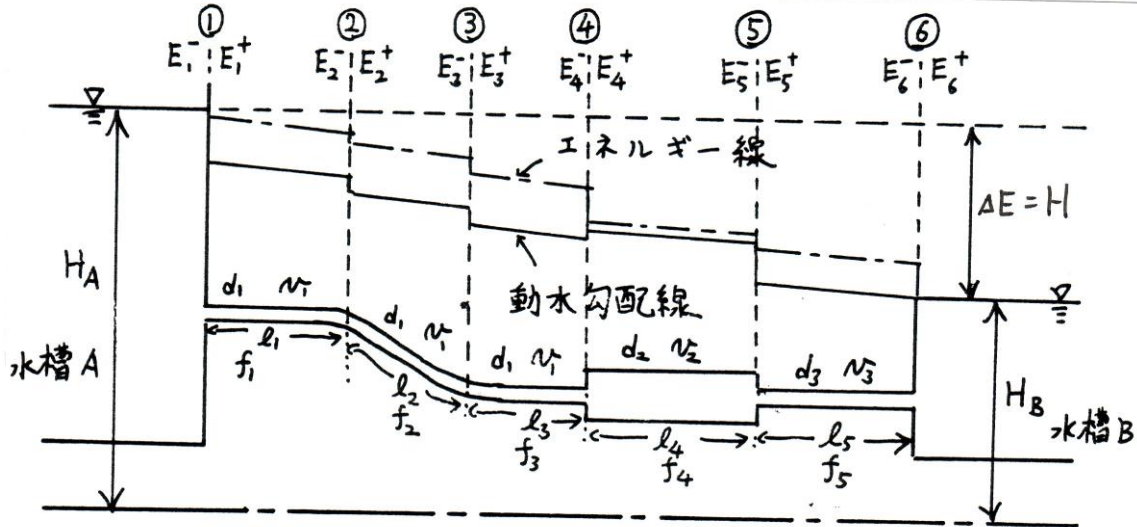


図-1 単線管路の一例

管路の任意の場所における流れの持つエネルギーを水頭で表すと

$$E = H_A = \frac{\alpha v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} + h_l$$

となる。Eは全エネルギー、 H_A は水槽Aにおけるエネルギー、 h_l は管路の始端から考えている場所までの摩擦損失および形状損失の総和である。損失までを含んで考えればエネルギーは保存されている。

エネルギー線と動水勾配線の計算

図-5に単線管路の例を示す。①～②区間の管路長を l_1 、摩擦損失係数を f_1 、管径を d_1 、断面平均流速を v_1 とする。同様に、②～③区間のそれらを l_2 、 f_2 、 d_1 、 v_1 、③～④区間のそれらを l_3 、 f_3 、 d_1 、 v_1 、④～⑤区間のそれらを l_4 、 f_4 、 d_2 、 v_2 、⑤～⑥区間のそれらを l_5 、 f_5 、 d_3 、 v_3 とする。

エネルギー線：全水頭（速度水頭 $\alpha v^2/2g$ 、圧力水頭 $p/\rho g$ 、高度水頭 z の和）を流下方向に繋げた線
ある断面の上流側の面に-を下流側に+の添え字を付ける。各断面の前後のエネルギー E^- (E^+) は以下のようにして計算される。

①入り口 :	$E_1^- = H_A,$	$E_1^+ = H_A - \xi_e \frac{v_1^2}{2g}$
②曲がり :	$E_2^- = E_1^+ - f_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g},$	$E_2^+ = E_2^- - \xi_b \frac{v_1^2}{2g}$
③曲がり :	$E_3^- = E_2^+ - f_2 \frac{l_2}{d_1} \frac{v_1^2}{2g},$	$E_3^+ = E_3^- - \xi_b \frac{v_1^2}{2g}$
④急拡 :	$E_4^- = E_3^+ - f_3 \frac{l_3}{d_1} \frac{v_1^2}{2g},$	$E_4^+ = E_4^- - \xi_{se} \frac{v_1^2}{2g}$

$$\begin{aligned} \text{⑤急縮} &: E_5^- = E_4^+ - f_4 \frac{l_4}{d_2} \frac{v_2^2}{2g}, & E_5^+ &= E_5^- - \xi_{sc} \frac{v_3^2}{2g} \\ \text{⑥出口} &: E_6^- = E_5^+ - f_5 \frac{l_5}{d_3} \frac{v_3^2}{2g}, & E_6^+ &= E_6^- - \xi_o \frac{v_3^2}{2g} = H_B \end{aligned}$$

ここで、 ξ_c は入り口損失係数、 ξ_b は曲がり損失係数、 ξ_{sc} は急拡損失係数、 ξ_{sc} は急縮損失係数、 ξ_o は出口損失係数である。

動水勾配線：ピエゾ水頭（圧力水頭 $p/\rho g$ 、高度水頭 z の和）を流下方向に繋げた線（エネルギー線よりも速度水頭のみだけ小さい。）

ある断面の上流側の面に－を下流側に＋の添え字を付ける。各断面の前後のピエゾ水頭 H^- (H^+) は以下のようにして計算される。

$$\begin{aligned} \text{①入り口} &: H_1^- = H_A, & H_1^+ &= E_1^+ - \frac{\alpha v_1^2}{2g} \\ \text{②曲がり} &: H_2^- = E_2^- - \frac{\alpha v_1^2}{2g}, & H_2^+ &= E_2^+ - \frac{\alpha v_1^2}{2g} \\ \text{③曲がり} &: H_3^- = E_3^- - \frac{\alpha v_1^2}{2g}, & H_3^+ &= E_3^+ - \frac{\alpha v_1^2}{2g} \\ \text{④急拡} &: H_4^- = E_4^- - \frac{\alpha v_1^2}{2g}, & H_4^+ &= E_4^+ - \frac{\alpha v_2^2}{2g} \\ \text{⑤急縮} &: H_5^- = E_5^- - \frac{\alpha v_2^2}{2g}, & H_5^+ &= E_5^+ - \frac{\alpha v_3^2}{2g} \\ \text{⑥出口} &: H_6^- = E_6^- - \frac{\alpha v_3^2}{2g} = H_B, & H_6^+ &= E_6^+ - \frac{0}{2g} = H_B \end{aligned}$$

断面④⁺で動水勾配線が上昇していることに注意！ エネルギー線は流下方向に減少するが、動水勾配線は急拡によって圧力が大きくなりピエゾ水頭が回復することもある。

エネルギー線、動水勾配線ともに線の傾きと実際の管の傾きは無関係である。

管路末端が自由放水管の場合

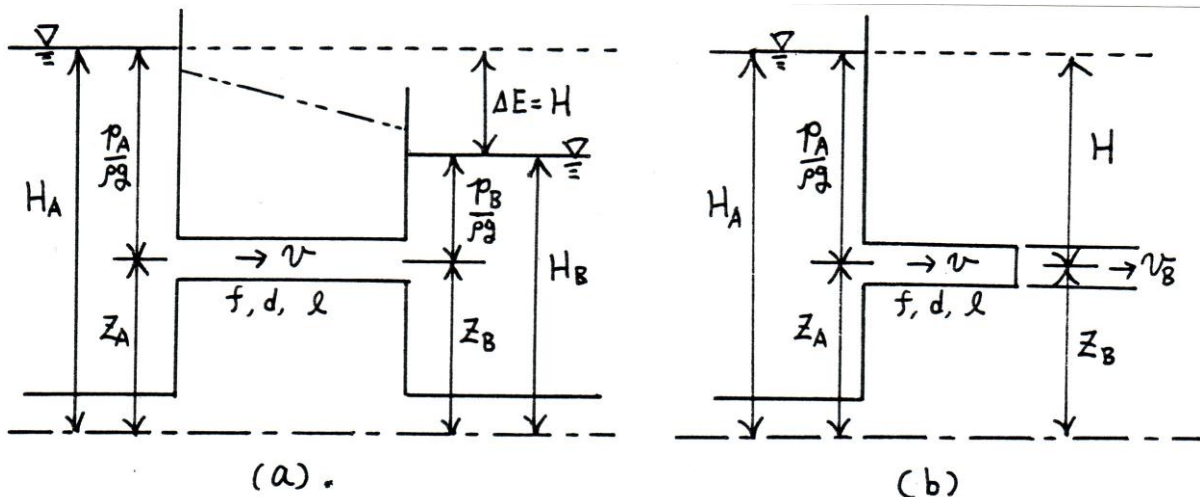


図-2 管路末端が水槽と自由放水管

管路末端が水槽の場合（図-2a）では、ベルヌイの定理から次式が成立する。

$$\Delta E = \left(\frac{\alpha v_A^2}{2g} + z_A + \frac{p_A}{\rho g} \right) - \left(\frac{\alpha v_B^2}{2g} + z_B + \frac{p_B}{\rho g} \right) = \left(z_A + \frac{p_A}{\rho g} \right) - \left(z_B + \frac{p_B}{\rho g} \right) = H_A - H_B = H = \left(\xi_c + \xi_o + f \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g} \quad (6)$$

管路末端が自由放水管の場合 (図-2b) では、ベルヌイの定理から次式が成立する

$$\Delta E = \left(\frac{\alpha v_A^2}{2g} + z_A + \frac{P_A}{\rho g} \right) - \left(\frac{\alpha v_B^2}{2g} + z_B + \frac{P_B}{\rho g} \right) = \left(z_A + \frac{P_A}{\rho g} \right) - \left(\frac{\alpha v_B^2}{2g} + z_B \right) = H_A - z_B - \frac{\alpha v_B^2}{2g} = H - \frac{\alpha v_B^2}{2g} = \left(\xi_e + f \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g}$$

管路内流速 v と流出流速 v_B は等しいと考えられる。これを考慮すれば次式を得る。

$$H = \left(\xi_e + f \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g} + \frac{\alpha v_B^2}{2g} = \left(\xi_e + \alpha + f \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g} \quad (7)$$

式 (6) と式 (7) を比較すれば出口損失係数 ξ_o とエネルギー補正係数 α の違いだけである。両者は同じ値をとるので、管路末端が水槽であろうと自由放水管であろうと形式的には一致する。

流量の計算

図-5 に示す水槽 A と水槽 B の間にベルヌイの定理を適用すると

$$H_A - H_B = \Delta E = \left(\xi_e + 2\xi_b + \xi_{se} + f_1 \frac{l_1}{d_1} + f_2 \frac{l_2}{d_1} + f_3 \frac{l_3}{d_1} \right) \frac{v_1^2}{2g} + f_4 \frac{l_4}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} + \left(\xi_{sc} + \xi_o + f_5 \frac{l_5}{d_3} \right) \frac{v_3^2}{2g} \quad (8)$$

H は両水槽の水位差 (落差) である。連続の式 $Q = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4} = v_3 \frac{\pi d_3^2}{4}$ を用いて式 (8) から流速を消去し、流量 Q について整理すれば次式を得る。

$$Q = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2gH}{\frac{A}{d_1^4} + \frac{B}{d_2^4} + \frac{C}{d_3^4}}} \quad (9)$$

ここで、 $A = \xi_e + 2\xi_b + \xi_{se} + f_1 \frac{l_1}{d_1} + f_2 \frac{l_2}{d_1} + f_3 \frac{l_3}{d_1}$, $B = f_4 \frac{l_4}{d_2} \frac{v_2^2}{2g}$, $C = \xi_{sc} + \xi_o + f_5 \frac{l_5}{d_3}$

以上のように落差と各種損失係数、管径、管路長が分かれば流量が計算できる。実務では以下の問題が考えられる。

- 1) 管径、流量を与えて必要な落差 H を求める。
- 2) 落差、管径を与えて流量を求める。
- 3) 落差、流量を与えて管径を求める。

なお、落差に水の単位重量 ρg を掛けると圧力の次元になる。落差は圧力差 ($\Delta p = \rho g H$) と見なすことができる。

2.水車, ポンプ

図-3 に示す単線管路を考える。簡単のため入り口損失と出口損失は無視する。エネルギー線は図-3 に示す通りである。

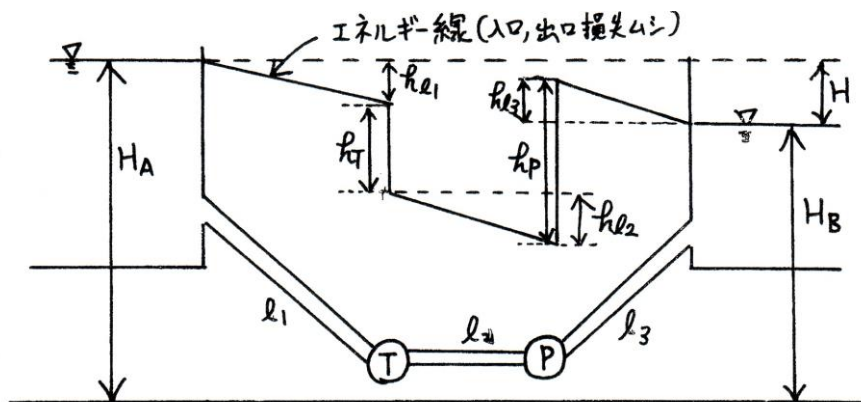


図-3 水車とポンプを含む単線管路

ここで、 H は落差 (全損失水頭), T は水車 (turbine), P はポンプ (pump), h_{l1} は管 l_1 の摩擦損失水頭, h_{l2} は管 l_2 の摩擦損失水頭, h_{l3} は管 l_3 の摩擦損失水頭, h_T は水車による損失水頭, h_P はポンプによって得られた水頭 (全揚程)

水槽 A と水槽 B 間でベルヌイの定理を適用する.

$$H_A - H_B = H = h_{l1} + h_T + h_{l2} - h_P + h_{l3} = (h_{l1} + h_{l2} + h_{l3}) + h_T - h_P$$

$$H = h_l + h_T - h_P$$

ここで、 $h_l = h_{l1} + h_{l2} + h_{l3}$ である (AB 間の摩擦損失の総和). h_P の前の負号はエネルギーを獲得していることを表す (損失を正で考えているため).

(a) 水車

単位時間当たりには流れる水によってなされる仕事を L_0 とする. これを理論水力という.

$$L_0 = \rho g Q h_T = 1000(\text{kg}/\text{m}^3) \times 9.8(\text{m}/\text{s}^2) \times Q(\text{m}^3/\text{s}) \times h_T(\text{m}) = 9800 Q h_T (\text{Nm}/\text{s} = \text{W}) = 9.8 Q h_T (\text{kW})$$

図-3 では $h_T = H + h_P - h_l$ となる. 発電所効率を η とすれば発電所出力 L は $L = \eta L_0$ である.

(b) ポンプ

図-4 に示すようにポンプで下方の水槽 A から上方の水槽 B に水を揚げる. 水位差を $H = H_B - H_A$ とするとポンプによってなされる理論水力 L_0 は

$$L_0 = \rho g Q h_P = \rho g Q (H + h_l)$$

図-4 の例では全揚程 h_P は $h_P = h_l + H$ が全揚程 h_P である.

(ちなみに図-1 の例では全揚程 h_P は $h_P = h_l + h_T - H$ である. 水位差の定義が $H = H_A - H_B$ であることに注意する.)

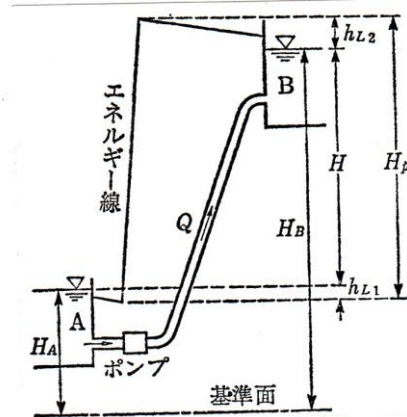


図-4 ポンプによる揚水

3. サイフォン (syphon)

サイフォン: 単線管水路において図-5 の C 点のように管路の一部が動水勾配線よりも高い位置にあり, その圧力が負値になるものをサイフォンという. (圧力がマイナスになるのはゲージ圧で考えているからである. 絶対圧で考えれば大気圧よりも小さい圧力になる.)

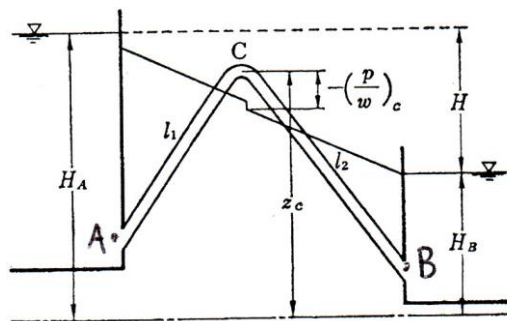


図-5 サイフォン

図-5 はサイフォンを示している. 摩擦損失係数を f , A 点から C 点 (管の最高点) までの管路長を l_1 , C 点から B 点までの管路長を l_2 とする. 管径 d は一定で管内流速を v とする. また基準面から C 点までの高さを z_c とする.

この例における管内流速 v と C 点の圧力水頭を求めよう. 図-5 において A 点と B 点の間でベルヌイの定理を適用すると

$$H_A = H_B + H = H_B + \left(\xi_e + \xi_b + \xi_o + f \frac{l_1 + l_2}{d} \right) \frac{v^2}{2g}$$

$$H = \left(\xi_e + \xi_b + \xi_o + f \frac{l_1 + l_2}{d} \right) \frac{v^2}{2g} \quad (1)$$

ここで、 ξ_e は入り口損失係数、 ξ_b は曲がり損失係数、 ξ_o は出口損失係数である。
A 点と C 点でベルヌイの定理を適用すると

$$H_A = \frac{\alpha v^2}{2g} + z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \left(\xi_e + \xi_b + f \frac{l_1}{d} \right) \frac{v^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \left(\alpha + \xi_e + \xi_b + f \frac{l_1}{d} \right) \frac{v^2}{2g} \quad (2)$$

式 (1) から

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{\xi_e + \xi_b + \xi_o + f \frac{l_1 + l_2}{d}}} \quad (3)$$

式 (2) と式 (3) から

$$\frac{p_C}{\rho g} = H_A - z_C - \frac{\alpha + \xi_e + \xi_b + f \frac{l_1}{d}}{\xi_e + \xi_b + \xi_o + f \frac{l_1 + l_2}{d}} H \quad (4)$$

この例では管内流速 v は式 (3) から、C 点の圧力水頭は式 (4) から求まる。

サイフォンの最高点 (図-5 では C 点) で圧力は最も小さくなる。理論的には-1 気圧 (-10.33m) まで取り得る。しかし、実際には- (8~8.5) m 程度で空洞現象により流れが遮断される。サイフォンの設計ではサイフォンの最高点での圧力水頭が- (8~8.5) m 以下になるようにしなければならない。

空洞現象 (cavitation) : サイフォンの最高点のような圧力が非常に低下するところでは、水の蒸気圧 (steam pressure) 以下となる場合がある。そこでは水中に溶けていた空気の放出やがては水が気化し気泡が発生する。これを空洞現象という。低圧部で発生した気泡は下流側に運ばれ、圧力の高いところで圧潰される。このとき壁面に強い衝撃力を作用させる。これをキャビテーションピッチング (cavitation pitting) という。