管水路の定常流（4）：管路の分岐・合流，並列管，管網計算

Steady pipe flow (1): merging pipe line・forking pipe line，parallel pipe，pipe networks

教科書 p.59-65

１．分岐管・合流管

図-１に示すように水槽 1，2，3 を管路①，②，③で連結する．f_1，l_1，D_1，v_1，Q_1はそれぞれ管路①の摩擦損失係数，管路長，管径，管路内断面平均流速，流量である．管②のそれらはf_2，l_2，D_2，v_2，Q_2である．また管③のそれらはf_3，l_3，D_3，v_3，Q_3である．H_1は水槽１の水位，H_2は水槽２の水位，H_3は水槽３の水位，E_Jは管の連結点 J における全エネルギー水頭である．

分岐管，合流管は以下のようにして判断する．

$E_J > H_2$：分岐管（水槽１からの流水が水槽２，水槽３へ向かう）

$E_J < H_2$：合流管（水槽１と水槽２からの流水が水槽３へ向かう）

$E_J = H_2$：水槽１からの流水だけが水槽３に流れる（$Q_2 = 0$）

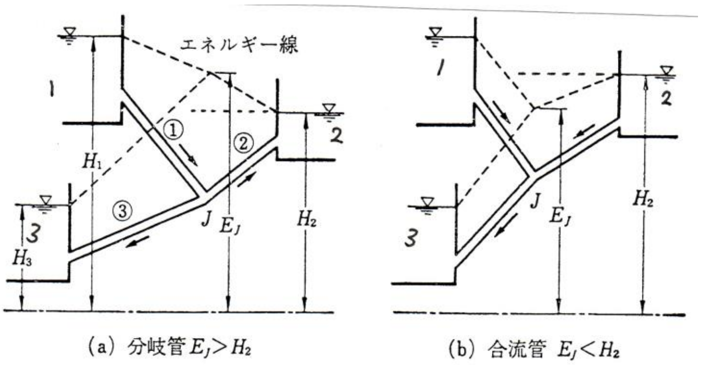

図-1　分岐管（a）と合流管（b）（形状損失は無視）

・ 分岐・合流管の計算

Step1 管路計算の式

簡単のため管路が十分長く形状損失が無視できる場合を考える．各水槽と連結点 J でベルヌイの定理を適用すると次式が得られる．

$$H_1 - E_J = f_1 \frac{l_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} = f_1 \frac{l_1}{D_1}\frac{1}{2g}\left(\frac{Q_1}{\pi D_1^2/4}\right)^2 = f_1 \frac{l_1}{D_1}\frac{8}{g\pi^2 D_1^4}Q_1^2 = \lambda_1 Q_1^2 \quad (1)$$

$$H_2 - E_J = \pm f_2 \frac{l_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g} = \pm f_2 \frac{l_2}{D_2}\frac{8}{g\pi^2 D_2^4}Q_2^2 = \pm \lambda_2 Q_2^2 \quad (2)$$

（合流の場合は＋，分岐の場合は－）

$$E_J - H_3 = f_3 \frac{l_3}{D_3}\frac{v_3^2}{2g} = f_3 \frac{l_3}{D_3}\frac{8}{g\pi^2 D_3^4}Q_3^2 = \lambda_3 Q_3^2 \quad (3)$$

ここで，$\lambda_i = f_i \dfrac{l_i}{D_i}\dfrac{8}{g\pi^2 D_i^4}$

流量の連続条件より，

$$Q_1 \pm Q_2 = Q_3 \quad (4)$$

（合流の場合は＋，分岐の場合は－）

Step2 分岐・合流の判定

$E_J = H_2(Q_2 = 0)$ と仮定して式(1)，(3)から Q_1，Q_3 を求める．$Q_1 < Q_3$ ならば合流管，$Q_1 > Q_3$ ならば分岐管である．最終的に解くべき式を以下に示す．

合流管：
$$\begin{aligned} H_1 - E_J &= \lambda_1 Q_1^2 \\ H_2 - E_J &= \lambda_2 Q_2^2 \\ E_J - H_3 &= \lambda_3 Q_3^2 \\ Q_1 + Q_2 &= Q_3 \end{aligned}$$

分岐管：
$$\begin{aligned} H_1 - E_J &= \lambda_1 Q_1^2 \\ H_2 - E_J &= -\lambda_2 Q_2^2 \\ E_J - H_3 &= \lambda_3 Q_3^2 \\ Q_1 - Q_2 &= Q_3 \end{aligned}$$

上記の連立方程式を解けば良い．水槽の水位 H_1，H_2，H_3 と λ_1，λ_2，λ_3 が与えられていて，流量 Q_1，Q_2，Q_3 と E_J を求める問題では，上記の連立方程式は流量に関して非線形連立方程式となり（行列式を用いた線形代数学では解けない）解法に工夫が必要となる．現在ではコンピュータが発達しているので様々な数値解法で解を求めることができる．

例題（教科書 p.61）

表-1　管の諸元

管路	H(m)	D(m)	f	λ
①	20	1000	0.036	9370
②	11	1200	0.036	11170
③	8	6400	0.0314	6840

表-1 を参考にして基礎式をたてれば以下のようになる．

$$\begin{aligned} 20 - E_J &= \lambda_1 Q_1^2 = 9370 Q_1^2 \\ 11 - E_J &= \pm\lambda_2 Q_2^2 = \pm 11170 Q_2^2 \\ E_J - 8 &= \lambda_3 Q_3^2 = 6840 Q_3^2 \\ Q_1 + Q_2 &= Q_3 \end{aligned}$$

E_J ＝11(m)とすれば上式は $20 - 11 = 9 = 9370 Q_1^2$，$11 - 8 = 3 = 6840 Q_3^2$ となる．これらから流量を求めると

$$Q_1 = 0.0310\left(m^3/s\right),\quad Q_3 = 0.0209\left(m^3/s\right)$$

を得る．比較すると $Q_1 > Q_3$ なので分岐管である．したがって解くべき式は

$$20 - E_J = \lambda_1 Q_1^2 = 9370 Q_1^2 \qquad (5)$$
$$11 - E_J = -\lambda_2 Q_2^2 = -11170 Q_2^2 \qquad (6)$$
$$E_J - 8 = \lambda_3 Q_3^2 = 6840 Q_3^2 \qquad (7)$$
$$Q_1 - Q_2 = Q_3 \qquad (8)$$

上式を解けば Q_1，Q_2，Q_3 と E_J が得られるが，非線形連立方程式なので工夫が必要である．ここでは以下のようにして解を得よう．

式(5)，(6) から E_J を消去

$$9 = \lambda_1 Q_1^2 + \lambda_2 Q_2^2 \qquad (9)$$

式(6)，(7) から E_J を消去

$$3 = -\lambda_2 Q_2^2 + \lambda_3 Q_3^2 \qquad (10)$$

式(9)，(10)から右辺の定数を 0 にするように整理すれば（3×式(10)－式(9)）

$$3\lambda_3 Q_3^2 - 4\lambda_2 Q_2^2 - \lambda_1 Q_1^2 = 0 \quad (11)$$

式(8)を用いて式(11)から Q_1 を消去する．

$$3\lambda_3 Q_3^2 - 4\lambda_2 Q_2^2 - \lambda_1\left(Q_2 + Q_3\right)^2 = \left(3\lambda_3 - \lambda_1\right)Q_3^2 - \left(4\lambda_2 + \lambda_1\right)Q_2^2 - 2\lambda_1 Q_2 Q_3 = 0 \qquad (12)$$

式（12）の両辺を Q_3^2 で除すれば

$$(3\lambda_3-\lambda_1)-(4\lambda_2+\lambda_1)\left(\frac{Q_2}{Q_3}\right)^2-2\lambda_1\frac{Q_2}{Q_3}=0 \qquad (13)$$

$Q_2/Q_3=X$ として式（13）を整理すれば

$$(4\lambda_2+\lambda_1)X^2+2\lambda_1 X-(3\lambda_3-\lambda_1)=54050X^2+18740X-11150=0 \qquad (14)$$

X は解と係数の関係から容易に求められる．

$$X=\frac{-18740\pm\sqrt{2761817600}}{108100}$$

X は流量比なので必ず正の値をとる．よって符号は＋を用いれば $X=0.313$ を得る．式（10）より

$$3=-\lambda_2 Q_2^2+\lambda_3 Q_3^2=-\lambda_2(XQ_3)^2+\lambda_3 Q_3^2=-11170\times(0.313Q_3)^2+6840Q_3^2 \qquad (15)$$

式（15）より $Q_3=0.0228(m^3/s)$ を得る．また，直ちに $Q_2=XQ_3=0.313\times0.0228=0.0071(m^3/s)$ が得られる．

式（8）より $Q_1=Q_2+Q_3=0.0299(m^3/s)$

式（7）より $E_J=6840Q_3^2+8=11.56(m)$

２．並列管の計算

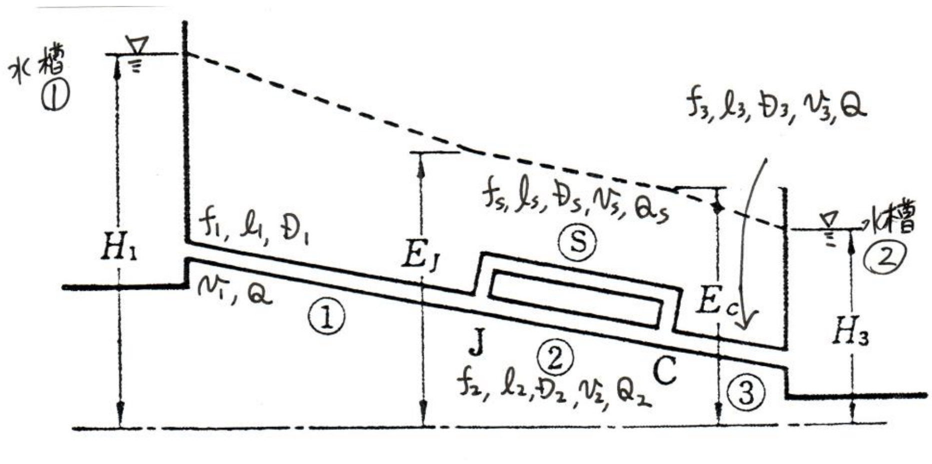

図-2　並列管（細管を持つ管路）

管水路の途中で２管以上に分岐し下流において再び合流するものを並列管という．図-2 に示すような並列管を考える．管の分岐点を J 点，合流点を C 点とする．管路は十分長いとして形状損失（局所損失）は無視する．管①の摩擦損失係数、管路長，管径，管内断面平均流速をそれぞれ f_1，l_1，D_1，v_1，Q とする。同様に管②のそれらは f_2，l_2，D_2，v_2，Q_2，管③のそれらは f_3，l_3，D_3，v_3，Q とする．

また側管 S のそれらを f_s，l_s，D_s，v_s，Q_s とする．H_1 は水槽①の水位，H_3 は水槽②の水位，E_J は分岐点 J 点における全エネルギー水頭，E_c は分岐点 C 点における全エネルギー水頭である．

水槽①と J 点にベルヌイの定理を適用し，この間のエネルギー損失を求めれば以下のようになる．

$$H_1-E_J=f_1\frac{l_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g}=\lambda_1 Q^2 \qquad (16)$$

同様に J 点と C 点間のエネルギー損失を求める．J 点から C 点への経路は管路②と管路 S の二通りがあるが，**どちらの経路を用いても J 点と C 点間のエネルギー損失は同じであることに注意する．**（ある区間のエネルギー損失はその区間の始めと終わりのエネルギーが分かっていれば両者の差として求められる．定常状態なので終わりのエネルギーは変化しない．どの経路を通ろうとも終わりのエネルギー

の状態になるのである．）

$$E_J - E_C = f_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2g} = \lambda_2 Q_2^2 = f_s \frac{l_s}{D_s} \frac{v_s^2}{2g} = \lambda_s Q_s^2 \qquad (17)$$

C 点と水槽②間のエネルギー損失を求める．

$$E_C - H_3 = f_3 \frac{l_3}{D_3} \frac{v_3^2}{2g} = \lambda_3 Q^2 \qquad (18)$$

流量の連続条件は

$$Q = Q_2 + Q_S \qquad (19)$$

式（17）から $Q_s^2 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_S} Q_2^2$ が得られる．これを式（19）に代入すれば

$$Q = \left(1 + \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_S}}\right) Q_2 \qquad (20)$$

水槽①と水槽②間のエネルギー損失水頭 H は

$$H_1 - H_3 = H = \lambda_1 Q^2 + \lambda_2 Q_2^2 + \lambda_3 Q^2 = \lambda_1 Q^2 + \lambda_2 \left(\frac{Q}{1+\sqrt{\lambda_2/\lambda_s}}\right)^2 + \lambda_3 Q^2 = \left(\lambda_1 + \frac{1}{(1+\sqrt{\lambda_2/\lambda_s})^2} + \lambda_3\right) Q^2 \qquad (21)$$

式（21）から Q が，式（19）と式（20）から Q_2，Q_S が求まる．

3. 管網計算

上水道や下水道のように管路が網状に配置される管路を管網という．（多数の分岐，合流が繰り返される）．管路網の計算は原理的には電気回路網の計算と同様である．しかし，電気回路と異なり流量と損失水頭の関係（電気回路ではオームの法則に相当）が線形ではないので，実際の計算では複雑になる．

規約：①節点での流出を q_r

②各管の流量 Q_i

③閉回路を時計回りに流れる（+），反時計回り（－）

原理：各節点での連続条件（節点条件）$q_r = \sum Q_i$

各管路損失水頭 $h_i = r_i Q_i^m$（Manning の式なら m=2 となる）

各閉回路を一周すると総損失水頭は０（閉合条件）$\sum h_i = \sum r_i Q_i^m = 0$

以上より，Q に関して非線形連立方程式が得られる．これを何らかの方法で解く．

解法の一手法として Hardy-Cross 法がある．