# 開水路の定常流（1）：開水路定常流の基礎式，常流と射流，比エネルギー

Steady open channel flow (1): basic equations for steady open channel flow, sub-critical flow and super-critical flow, specific energy

教科書 pp.78-83

## １．開水路定常流の基礎方程式

自由水表面（free water surface ; 大気と接する面）を有する流れを開水路流れという．河川はその代表例である．下水管などの管路の流れにおいても満管状態（流水断面積と管路の断面積が一致する流れ）でなければ自由水面が存在する．この場合も開水路流れに分類される．

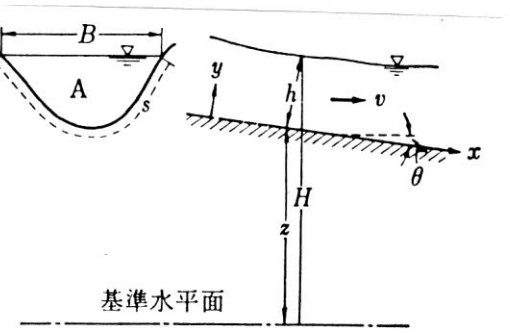


図-1　開水路の流れ

連続の式

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \qquad (1)（教科書 p.38 参照）$$

開水路における一次元漸変流方程式（エネルギーの式）

$$\frac{\beta}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}+H\right)+\frac{v}{gA}\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\partial A}{\partial t}=-\frac{\tau_0}{\rho g R} \quad (2)$$

$$\frac{\beta}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z\right)=-\frac{\tau_0}{\rho g R} \quad （管路の場合）$$

ここで，$A$ は流水断面積（流積），$v$ は断面平均流速，$Q$ は流量，$\alpha$はエネルギー補正係数，$\beta$は運動量補正係数，$H$ は基準面より測った水位，$\tau_0$ は底面（壁面）せん断応力，$R$ は径深である．$x$ は流路床に沿って流れ方向を正としている．

定常流を対象としているので時間微分項は 0 となる．したがって連続の式，エネルギーの式は以下のようになる．

$$Q=vA=const. \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}+H\right)=-\frac{\tau_0}{\rho g R} \qquad (4)$$

### 水面形方程式

定常流では流量は場所に関係なく一定である．流速は任意の場所の流積が分かれば連続式から直ちに求まる．よって，流積を知ることが重要になる．場所毎の流積が分かるということは，水面の流れ方向の形が分かるということである．そこで，水面の形を求める式（水面形方程式）を誘導する．

基準面から流路床までの高さ（地盤高）を $z$，水深 $h$ を流路床に対して直角（すなわち $y$ 軸方向）に測ると水位 $H$ は

$$H=z+h\cos\theta$$

である．流路床勾配 $dz/dx$，水面勾配 $dH/dx$ は

$$-\frac{dz}{dx}=\sin\theta=i$$

$$-\frac{dH}{dx}=-\frac{d}{dx}\left(z+h\cos\theta\right)=-\frac{dz}{dx}-\frac{dh}{dx}\cos\theta=\sin\theta-\frac{dh}{dx}\cos\theta$$

である．

エネルギー勾配 $I_e$ を以下のように定義する．

$$I_e=-\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}+H\right)$$

式（4）と上の定義式から壁面せん断応力 $\tau_0$ は $\tau_0=\rho gRI_e$ となる．また，摩擦速度は $u_*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}=\sqrt{gRI_e}$ で表される．

さて，流速係数 $\varphi(=v/u_*)$ で壁面せん断応力 $\tau_0$ を記述すると

$$\frac{\tau_0}{\rho}=u_*^2=\left(\frac{u_*}{v}\right)^2v^2=\frac{1}{\varphi^2}v^2$$

となる．以上の関係式を用いて式（4）を整理すると

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)=-\frac{dH}{dx}-\frac{\tau_0}{\rho gR}=\sin\theta-\frac{dh}{dx}\cos\theta-\frac{v^2}{\varphi^2 gR} \qquad (5)$$

連続の式を用いて断面平均流速 $v$ を消去する．また流積 $A$ が水深 $h$ と水面幅 $B$ の関数であり，さらに $h$ と $B$ は $x$ の関数であることに注意して微分の展開を行えば，次式を得る．

$$\frac{\alpha}{2g}\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{A^2}\right)=\sin\theta-\frac{dh}{dx}\cos\theta-\frac{1}{\varphi^2 gR}\left(\frac{Q}{A}\right)^2 \qquad (6)$$

左辺を整理すると（合成関数の微分を思い出すこと）

$$\frac{\alpha Q^2}{2g}\frac{d}{dx}\left\{A\left(B(x),h(x)\right)^{-2}\right\}=\frac{\alpha Q^2}{2g}\left[\frac{\partial A^{-2}}{\partial A}\cdot\frac{\partial A}{\partial B}\frac{dB}{dx}+\frac{\partial A^{-2}}{\partial A}\cdot\frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dx}\right]=-\frac{\alpha Q^2}{g}\left[\frac{1}{A^3}\cdot\frac{\partial A}{\partial B}\frac{dB}{dx}+\frac{1}{A^3}\cdot\frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dx}\right]$$

上式と式（6）より

$$-\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial B}\frac{dB}{dx}-\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dx}=\sin\theta-\frac{dh}{dx}\cos\theta-\frac{1}{\varphi^2 gR}\left(\frac{Q}{A}\right)^2$$

$$-\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dx}+\frac{dh}{dx}\cos\theta=\sin\theta-\frac{1}{\varphi^2 gR}\left(\frac{Q}{A}\right)^2+\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial B}\frac{dB}{dx}$$

$$\left(\cos\theta-\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial h}\right)\frac{dh}{dx}=\sin\theta-\frac{1}{\varphi^2 gR}\left(\frac{Q}{A}\right)^2+\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial B}\frac{dB}{dx}$$

$$\frac{dh}{dx}=\frac{\sin\theta-\frac{1}{\varphi^2 gR}\left(\frac{Q}{A}\right)^2+\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial B}\frac{dB}{dx}}{\cos\theta-\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial h}} \qquad (7)$$

式（7）が開水路定常流において水深の変化を表す式で水面形方程式と呼ばれる．流積 $A$ は水深 $h$ の関数なので，水深 $h$ が求まれば流積も求まる．式（7）は一階の常微分方程式であり，これを適切な境界条件のもとで積分すれば水面形状が求まる．これを不等流計算という．

水路形状が流れ方向に変化しない一様断面（$dB/dx$=0）では

$$\frac{dh}{dx}=\frac{\sin\theta-\dfrac{1}{\varphi^2 gR}\left(\dfrac{Q}{A}\right)^2}{\cos\theta-\dfrac{\alpha Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial h}} \qquad (8)$$

また，極めて勾配の急な水路を除いて実用的には，cosθ=1，sinθ= tanθ =$i$（流路床勾配）である．またエネルギー補正係数$\alpha$も$\alpha$=1 とおく．さらに流速係数$\varphi$については Chezy の式，Manning の式を用いれば以下のように表される．

$$\varphi=\frac{C}{\sqrt{g}}=\frac{R^{1/6}}{n\sqrt{g}}$$

C は Chezy の粗度係数，n は Manning の粗度係数，g は重力加速度，R は径深である．
これらより式（8）は以下のようになる．

Chezy の式を用いた場合：$$\frac{dh}{dx}=i\frac{1-\dfrac{Q^2}{C^2RA^2\sin\theta}}{1-\dfrac{\alpha Q^2 B}{gA^3\cos\theta}} \qquad (9\text{-}1)$$

Manning の式を用いた場合：$$\frac{dh}{dx}=i\frac{1-\dfrac{n^2Q^2}{R^{4/3}A^2\sin\theta}}{1-\dfrac{\alpha Q^2 B}{gA^3\cos\theta}} \qquad (9\text{-}2)$$

## ２．等流水深と限界水深

水面形方程式の分子と分母が 0 になる水深は重要である．簡単のため式（8）で考える．

**等流水深 $h_0$（uniform flow depth）**：等流（uniform flow：流れ方向（$x$ 方向）に水深，流速が変化しない流れ）状態の時の水深

$$\text{式（8）の分子}=\sin\theta-\frac{1}{\varphi^2 gR}\left(\frac{Q}{A}\right)^2=0$$

よって $Q=A\varphi\sqrt{gR\sin\theta}$ が満足されるとき等流水深が達成される

**限界水深 $h_C$（critical depth）**：

$$\text{式（8）の分母}=\cos\theta-\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial h}=0$$

これを満たすとき $dh/dx=\pm\infty$ となる．数学的には特異点である．

**限界水深の定義その 1**：限界水深は水面形方程式の数学的特異点を与える水深である．この定義付けは Bresse（ブレス）の定理と呼ばれる．

## ３．常流（sub-critical flow）と射流（super-critical flow）

不等流の水面計算では常流と射流で境界条件の与え方が異なるので，開水路流れでは常流であるか射流であるかを区別することは重要である．

常流と射流は次のように定義する．

常流：フルード数 $F_r$ が 1 よりも小さい流れ
射流：フルード数 $F_r$ が 1 よりも大きい流れ

フルード数が 1 のときは限界流（critical flow）という．またこの時の水深は限界水深である．

フルード数とは力学的には慣性力と重力の比であるが，現象的には開水路の断面平均流速 $v$ と波速（水表面の微小擾乱の位相速度） $c_0 = \sqrt{gh}$ の比で， $F_r = v/\sqrt{gh}$ である．

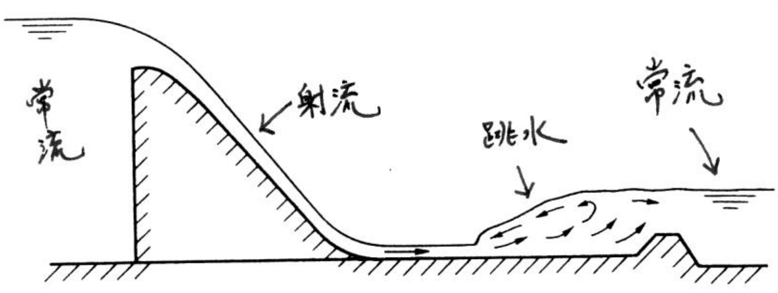


図-2　常流と射流

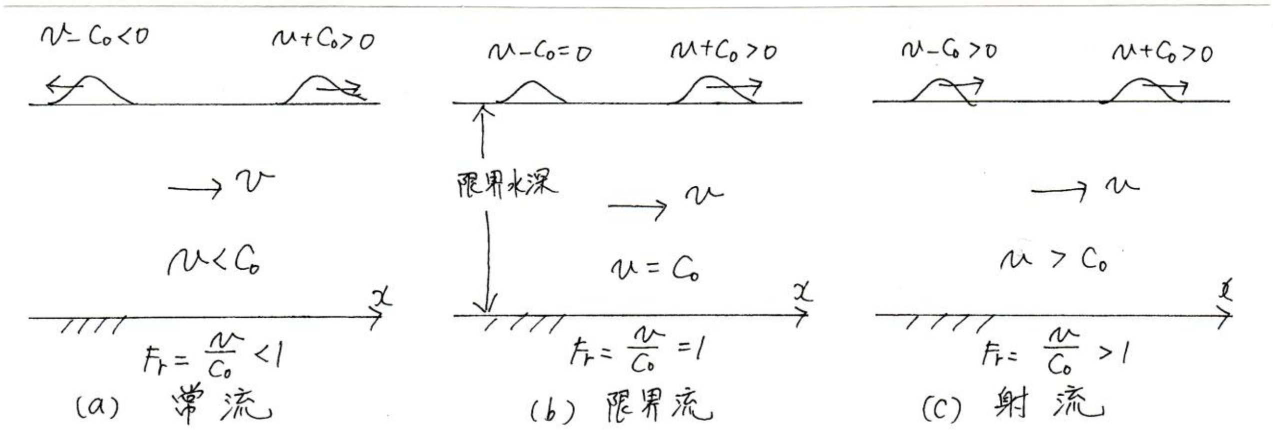


図-3　フルード数の現象論的意味

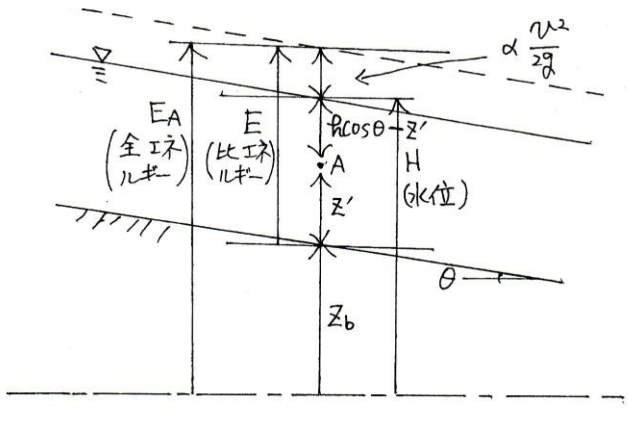


図-4　開水路流のエネルギー線

**4．比エネルギー（specific energy）**

比エネルギーは開水路のある断面の単位重量当たり水路床を基準とした全エネルギーである．ある水深での流速を $u$，エネルギー補正係数 $\alpha$，基準面から水路床までの高さを $z_b$，水路床から任意水深までの高さを $z'$，水深を $h$ とする．図-4 において，流れの中の A 点におけるエネルギーは以下のように表される．

$$E_A = \frac{u^2}{2g} + \left(z_b + z'\right) + \frac{p}{\rho g} \qquad (10)$$

河川のように水深方向の流れ成分が大きくない流れでは，圧力は静水圧分布に従う．よってＡ点の圧力は $p=\rho g(h\cos\theta-z')$となる．これを式（10）に代入すれば以下のようになる．

$$E_A=\frac{u^2}{2g}+\left(z_b+z'\right)+\frac{p}{\rho g}=\frac{u^2}{2g}+\left(z_b+z'\right)+\frac{\rho g\left(h\cos\theta-z'\right)}{\rho g}=\frac{u^2}{2g}+z_b+h\cos\theta \qquad (11)$$

　式（11）は任意水深Ａ点でのエネルギーである．今は一次元解析で開水路流れを考えているので，エネルギーも水深平均されたものを考える必要がある．そこで式(11)の水深平均をとってみよう．式(11)を以下のように展開していく．

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{h}\int_0^h E_A dz=\frac{1}{h}\int_0^h\left(\frac{u^2}{2g}+z_b+h\cos\theta\right)dz=\frac{1}{h}\int_0^h\frac{u^2}{2g}dz+\frac{1}{h}\left[z_b z+h\cos\theta\cdot z\right]_0^h h\\&=\frac{1}{h}\int_0^h\frac{u^2}{2g}dz+z_b+h\cos\theta=\frac{\alpha v^2}{2g}+z_b+h\cos\theta\end{aligned} \qquad (12)$$

ここで $v$ は断面平均流速，$\alpha$ はエネルギー補正係数である．基準面は任意なので水路床に基準面をとる．すると $z_b=0$ となる．よって比エネルギーは式（13）となる．

$$\boxed{E=\frac{\alpha v^2}{2g}+h\cos\theta=\frac{\alpha}{2g}\left(\frac{Q}{A}\right)^2+h\cos\theta \quad (13) \qquad \text{重要！}}$$

$Q$ は流量，$A$ は流水断面積である．

**注意：速度水頭，圧力水頭，高度水頭（位置の水頭）の和を比エネルギーとして管路流にも使用している教科書もある．しかし本来は開水路で用いられる用語である．圧力が静水圧分布に従うとき流水のエネルギーは速度水頭と水深の和で表され，これを比エネルギーと呼ぶ．比という言葉は英語の「specific」の部分であるが，「specific」には比という意味はない．「限定された」，「特に指定した」という意味であり，ここでは「基準面を水路床に限定した」という意味で用いている．比と訳すのは「specific gravity」を比重と訳すところに由来している．**

**語句説明問題で比エネルギーを「速度水頭，圧力水頭，高度水頭の和」と書けば不正解とする．**

補足（教科書 p.103 参照）
流速 $u$(z)の自乗水深平均（断面平均）は水深平均（断面平均）流速 $v$ の自乗にはならない．
このため導入される係数が運動量補正係数 $\beta$ である．エネルギー補正係数 $\alpha$ は流速の３乗を補正する係数である．
なお，式（13）の誘導は厳密には $u\mathrm{E_A}$（エネルギーフラックスという）を積分する必要があるが，簡単のため省略している．

$$v=\frac{1}{h}\int_0^h u(z)dz$$

$$\frac{1}{h}\int_0^h u(z)^2 dz\neq v^2=\frac{1}{h}\int_0^h u(z)dz\cdot\frac{1}{h}\int_0^h u(z)dz$$

$$\beta=\frac{\frac{1}{h}\int_0^h u(z)^2 dz}{v^2}$$

$$\frac{1}{h}\int_0^h u(z)^2 dz=\beta v^2$$

$$\alpha=\frac{\frac{1}{h}\int_0^h u(z)^3 dz}{v^3}$$