水理学Ⅱで必要な数学知識
Mathematics for studying Hydraluics II

1. 微分 differential

関数の英語訳は function であるが function には機能という意味も持つ。関数はある入力値に対して何らかの出力値を返す機能を持つことに由来する。関数への入力は独立変数（independent valuable）とよばれる変数を介して行われる。

さて図-1 に示すような一変数 x（独立変数が一個のみの場合）関数がある。この関数は連続的に滑らかに繋がっている。ある任意の x 点における関数値は $f(x)$である。この点の勾配（gradient）はその点における関数値の変化率（change rate）を表している。勾配が大きいということは変化が大きく、勾配が小さいということは変化が小さい。このような勾配または変化率を微分係数（differential coefficient）と呼ばれる。

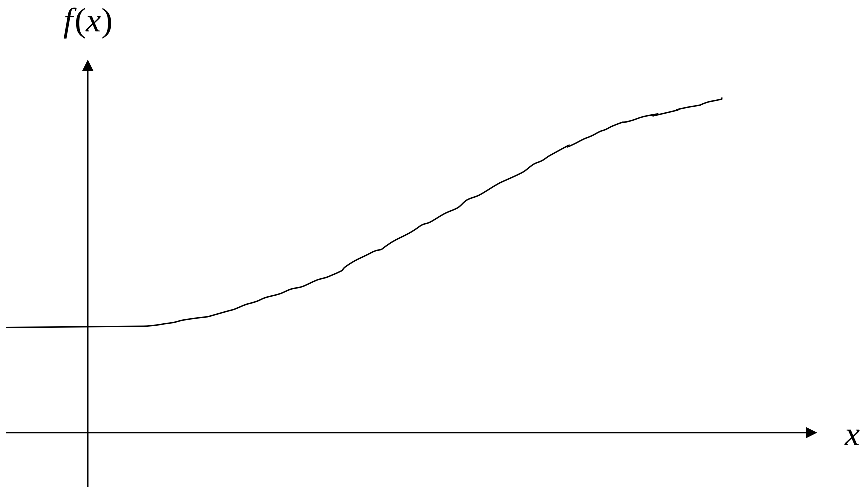

図-1　関数 f(x)

関数を微分するということは、その関数の変化率を表す式を求めることである。この変化率を表す式は導関数（Derivative）と呼ばれる。高校の数学で学習したように導関数は次式で得られる。

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} \quad (1)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} \quad (1)'$$

式(1)および(1)'は導関数または微分の定義である。この式から $f(x)$が地盤高であればまさしく勾配を計算していることにあるが、数学や物理でいうところの勾配は地面の傾きでなくても良い。任意の物理量（温度、速度、濃度、圧力などなんでも良い）の変化率を勾配と呼ぶ。すでに水理学 I において圧力勾配などの言葉が出ている。

さて式(1)では微分の記号として d/dx を用いている。これは微分演算子（derivative operator）で関数 $f(x)$ を x で微分するという操作を表す。

補足：演算子という語を初めて聞く学生もいるかもしれないが、演算子はすでになじみ深い。例えば和という演算操作を表す演算子は+であり、差という演算操作を表す演算子は—である。A+B は A と B の

和を計算することを意味している。

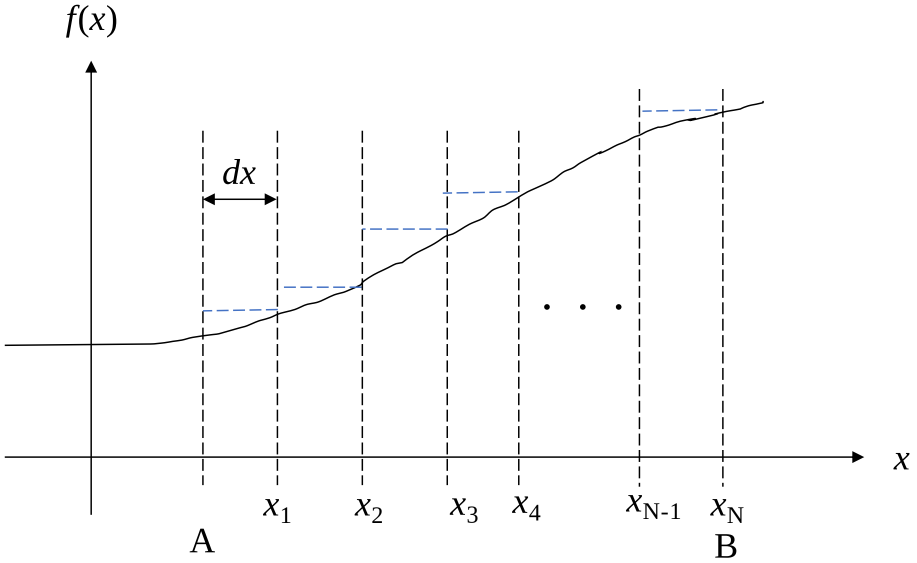

図-2　AB 区間の定積分（求積）

演算子に *d* という小文字のアルファベットが用いられているが、これは differential の頭文字である。これは式(1)または(1)'の分母も分子もある二点間の差（differential には差という意味もある）であることを意味している。この差を極限操作する（分母と分子をともに 0 に近づける。）ことで任意点 *x* の勾配が計算される。

d/*dx* は一変数関数の微分操作を表しており、これを常微分（ordinally differential または ordinally derivative）と呼ぶ。

2. 積分 Integral

図-2 に示す関数を区間 A から B まで *dx* 間隔で分割する。この場合 N 個の細かな長方形があるので、式(2)に示すようにそれらの和を求めれば AB 区間の面積 S に近い値が求まる。

$$S = \sum_{i=1}^{N} f\left(x_i\right) dx \tag{2}$$

dx を小さくし分割数を増やしていけば、AB 区間の真の面積の値に近づいていく。*dx* を無限小にすれば分割数は無限大になり、一個、二個と数えられるものでなくなる（つまり連続的になる）。そこで AB 区間の面積を表す記号（積分記号）を以下のようにする。*dx* の記号が残っている。微小分割を表しているが、むしろ *x* に関して積分することを表すとの理解が良いであろう（多変数関数の場合に便利）。

$$S = \int_{x=A}^{x=B} f\left(x\right) dx \tag{2}$$

さて、微分は変化率を求めるものであり、積分は面積を求めるもの（求積）である。両者はもともと別の目的から発展したものであるが、微積分学として発達した理由は導関数 *f*(*x*)を積分すればもとの関数 *F*(*x*)に戻ることである。*F*(*x*)は *f*(*x*)の原始関数（primitive function）である。

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \tag{3}$$

$$F(x) + C = \int f(x) dx \tag{4}$$

C は積分定数（integration constant）である。積分区間を指定して積分することを定積分（definite integral）、指定せずに積分することを不定積分（indefinite integral）と呼ぶ。不定積分の場合必ず積分定数が発生することに注意する。つまり導関数 $f(x)$に対して原始関数は無数に存在する。
さて、式(3)、(4)の関係があるからこそ微積分が工学において重要な役割を演じることができる。

3. 常微分方程式　Ordinally Differential Equation

微分方程式と導関数を含んだ数式のことである．常微分は一変数の関数の微分のことであるので一変数関数の導関数を含んだ方程式である。

常微分方程式の例（速度と距離の関係）:
基準面 z=0 から初速 v_0 で鉛直上向き（z 方向とする）に質量 m の物体を発射したときに最高点 z_{max} に達するまでの時間と最高点の高さを求めよ。重力加速度を g とする。

ニュートンの第二法則（運動量保存の法則）より

$$\frac{dmv}{dt} = m\frac{dv}{dt} = -mg \tag{4}$$

ここで v は物体の鉛直方向速度、t は時間である。m を一定値として微分の外に出すと質量×加速度＝外力という式になっていることが分かる。(4)式を時間に関して積分すると次式を得る。

$$\int \frac{dmv}{dt}dt = -\int mgdt$$
$$m\int \frac{dv}{dt}dt = -mg\int dt$$
$$mv = -mgt + C$$
$$v = -gt + C' \tag{5}$$

C は積分定数である。C'も積分定数であるが $C'=C/m$ である。初期条件を用いて積分定数を求める。初期条件（時間的に一番はじめの時刻における運動の状態）は初速 v_0 である。つまり t=0 で速度は v_0 ということであるので、上式に代入すると

$$v_0 = C'$$

となり積分定数が決まる。初期条件は無数に存在する原始関数を一つに決めるものである。よって

$$v = -gt + v_0 \tag{6}$$

となる。式(6 は任意時刻の物体の速度を表す式である。式(5)が 0 となる時間は

$$0 = -gt + v_0$$
$$t = \frac{v_0}{g}$$

式(4)の微分は d/dt であり、時間に関して 1 回微分を行う。これを一階微分（one rank derivative）という（カイの漢字に注意。回は操作の回数、階は操作によって得られた微分の次数）。
次に到達高さを求める。速度 v は移動距離 z を時間で微分したものである（移動距離の時間変化率が速度）。

$$v = \frac{dz}{dt}$$

これを式(4)に代入する。

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \tag{7}$$

式(6)は時間に関して二階微分（微分が二回行う）が含まれている。この式の解を求める（式(6)を積分し

て z の関数形を求めること）には積分を二回行う必要がある。m も g も時間に関して一定値であるので、そのまま積分できる。

$$\iint \frac{d^2 z}{dt^2} dtdt = -g \iint dtdt$$
$$\int \frac{dz}{dt} dt = -g \int (t + C_1) dt$$
$$z = -g\left(\frac{1}{2}t^2 + C_1 t + C_2\right) \tag{8}$$

二回積分したので積分定数が二個出てきている。これら積分定数を決めるためには条件が二個必要である。その条件は「基準面 z=0 から初速 v_0 で鉛直上向きに物体を発射」である。まず初期時刻（t=0）に物体は z=0 にいたので t=0 を式(7)に代入すると

$$0 = -gC_2$$

が得られる。よって C_2=0 が得られる。式(8)に至る過程で式(5)が得られている。

$$\frac{dz}{dt} = v = -g(t + C_1) = -gt + v_0$$

C_1=-v_0/g となる。整理すると

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \tag{9}$$

t=v_0/g を式(9)に代入すると

$$z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \frac{v_0}{g} = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g} \tag{10}$$

4. 偏微分方程式 Partial Differential Equation

物理学や工学では現象を微分方程式で記述し、それを解くということが頻繁に行われる。水理学のように流れを取り扱う場合には三次元空間座標と時間が独立変数になることが多い（水理学 I では定常状態の一次元解析を対象としていたので、例えば水面形方程式は一変数となっていた。）。つまり x、y、z、t の多変数関数を取り扱うことになる。

多変数の微分は以下のように定義される。

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x} &= \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \\
\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y} &= \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} \\
\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta z} &= \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} \\
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x, y, z, t+\Delta t) - f(x, y, z, t)}{\Delta t} &= \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t}
\end{aligned} \tag{11}$$

これは例えば x に関して関数の微分を行う際には、他の変数は固定しておいて（定数のようにしておく）x に関してのみ微分を行う。他の変数で微分を行う場合も同様である。常微分と異なり、変数の一部のみ微分を行うため部分的なという意味の偏（partial）という語がついている。

微分演算子も $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z, \partial/\partial t$ の記号が用いられる。∂ はルンドあるいはラウンドと読む。

5. 一変数の Taylor 展開

一変数の関数 $f(x)$が連続で n 回微分可能ならば x_0 からδx だけ離れた関数の値 $f(x_0+\delta x)$は、点 x_0 におけ

る関数値と導関数によって次式で与えられる。

$$f(x_0+\delta x)=f(x_0)+\frac{df(x_0)}{dx}\delta x+\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}\frac{\delta x^2}{2!}+\frac{d^3f(x_0)}{dx^3}\frac{\delta x^3}{3!}+\ldots++\frac{d^nf(x_0)}{dx^n}\frac{\delta x^n}{n!} \tag{12}$$

これを Taylor 展開と呼ぶ。
δx が十分小さくの δx^2、δx^3、・・・δx^n の項が無視できるものとすると

$$f(x_0+\delta x)\simeq f(x_0)+\frac{df(x_0)}{dx}\delta x$$

となる。

6.　多変数の Taylor 展開（全微分）

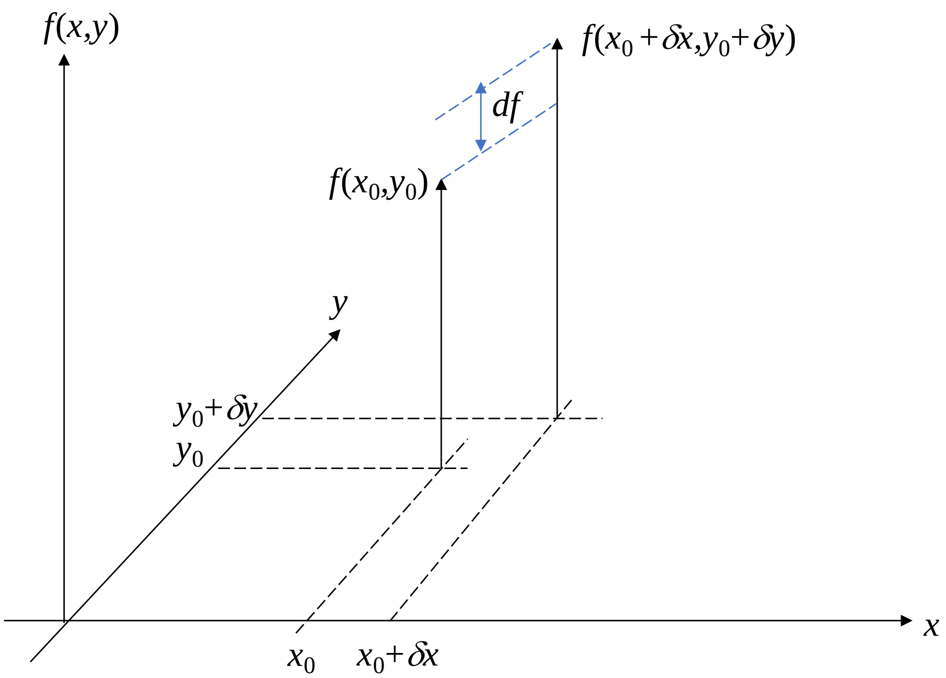

図-3　二変数の Taylor 展開（全微分）

　多変数の Taylor 展開は以下のようになる。ここでは簡単のため 2 変数を考える。図-3 のように xy 空間中の座標（x_0、y_0）において関数の値と $f(x_0、y_0)$とする。この座標から少しだけ離れた座標から$(x_0+\delta x$、$y_0+\delta y)$とする。この座標での関数の値 $f(x_0+\delta x$、$y_0+\delta y)$は以下のように表すことができる。関数 $f(x,y)$は n 回微分可能とすると

$$\begin{aligned}&f(x_0+\delta x,y_0+\delta y)\\&=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\delta y+\frac{1}{2!}\left(\delta x\frac{\partial}{\partial x}+\delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)+\frac{1}{3!}\left(\delta x\frac{\partial}{\partial x}+\delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3f(x_0,y_0)+\ldots\\&+\frac{1}{n!}\left(\delta x\frac{\partial}{\partial x}+\delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x_0,y_0)\end{aligned}$$

　ここで

$$\left(\delta x\frac{\partial}{\partial x}+\delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)=\left(\delta x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\delta x\delta x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\delta x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x_0,y_0)$$

$$=\delta x^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}+2\delta x\delta y\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}+\delta y^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$$

以下同様である。

δx、δy が十分小さいとして上式を整理すれば

$$f(x_0+\delta x,y_0+\delta y)\simeq f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\delta y$$

となる。三変数以上も同様に記述できる。

$$f(x_0+\delta x,y_0+\delta y,z_0+\delta z,t_0+\delta t)\simeq f(x_0,y_0,z_0,t_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0,t_0)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0,t_0)}{\partial y}\delta y$$

$$+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0,t_0)}{\partial z}\delta z+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0,t_0)}{\partial t}\delta t$$

図−3 に示すように二点間の関数値の差を df とすれば

$$df=f(x_0+\delta x,y_0+\delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\delta y$$

これは全微分と呼ばれる。