

粘性流体の力学(3) 層流と乱流, 層流の流速分布

Dynamics of viscous fluid #3

Laminar flow and turbulent flow, velocity profile of laminar flow

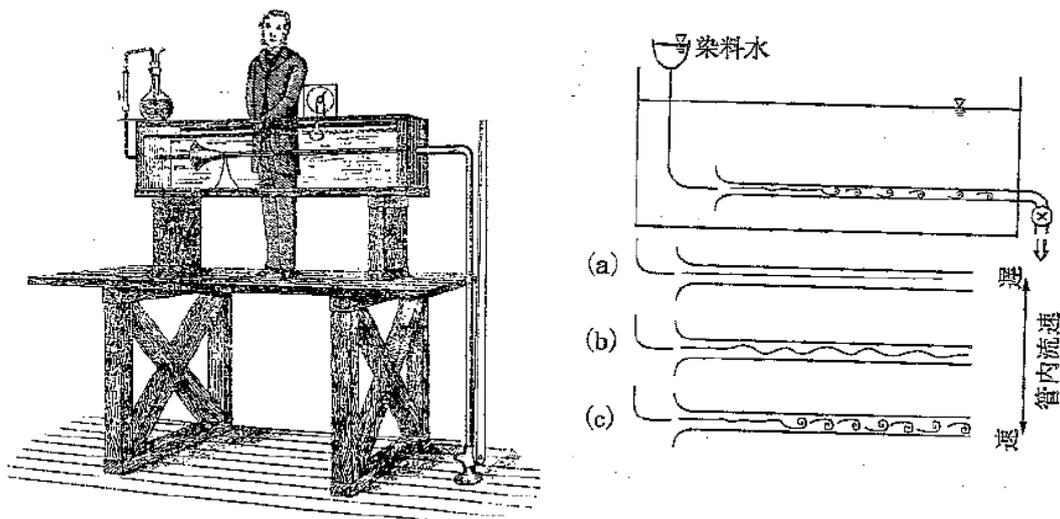
教科書 pp.169-175, 184-186

1. 層流と乱流 (laminar flow and turbulent flow)

1-1 レイノルズの実験

O. Reynolds は水槽中に置かれたガラス管内の流況を染料で可視化した (図-1, 教科書 p.185 図 5.15 参照). その結果流速が遅い場合には管内流は管と平行に整然と流れ, 流速が遅い場合には管内流が乱れることを明らかにした. 整然とした流れを層流, 乱れた流れを乱流と呼ぶ. 図-1b は層流と乱流の中間的な流れで遷移流という. レイノルズは流速 u , 管の径 d , 粘性係数 ν を変えて実験を行いレイノルズ数 Re と呼ばれる無次元パラメータがある値を越えたときに乱流になることを見いだした.

$$Re = \frac{ud}{\nu}$$



レイノルズの実験

図-1 レイノルズの実験

1-2 限界レイノルズ数

粘性流体では管壁の摩擦抵抗や内部摩擦によってエネルギーの一部が失われる. 離れた二点間のエネルギーは一定ではなく h_l だけ流下方向にエネルギーを失う. これをエネルギー損失という (完全流体ではエネルギー損失は生じない). 失われるエネルギー h_l はレイノルズ数によって変化する. それを図示したのが図-2 である. 層流では h_l は流速に比例し, 乱流では流速の二乗に比例する. 層流から乱流に変化する場合を考えよう. 図-2 でいうと OABCD とたどる道筋である. B 点で層流から乱流へと変化する. これを高限界レイノルズ数と呼ぶ. およそ 4000 程度であるが管の入り口の形状などで変化する.

次に乱流から層流に変化する場合を考えよう. これは DCAO という道筋である. この場合乱流と層流の境は A 点となる. これを低限界レイノルズ数と呼ぶ. 実際には AB 間は層流と乱流の中間的な領域で遷移領域と呼ぶ. 低限界レイノルズ数はこれよりも小さなレイノルズ数では決して乱流にはならないという限界のレイノルズ数である. 限界レイノルズ数は通常低限界レイノルズ数を指す. 管路ではおよそ 2000~2300 程度である.

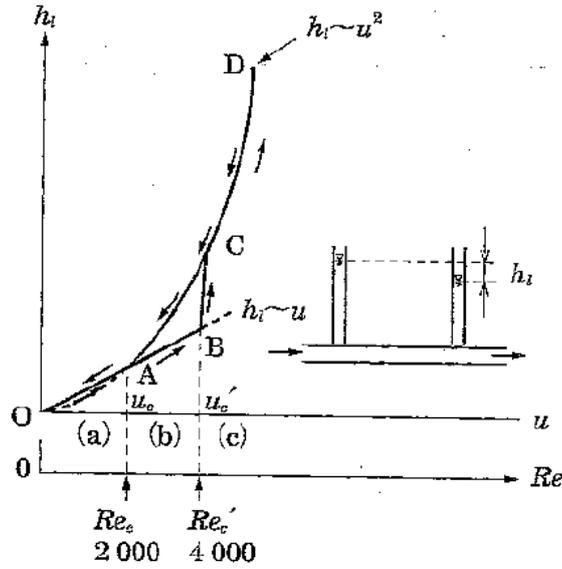


図-2 層流と乱流におけるエネルギー損失 (a) 層流域 (b) 遷移領域 (c) 乱流域

2. 管路・開水路における層流・等流の流速分布

1-1 管路の等流の流速分布

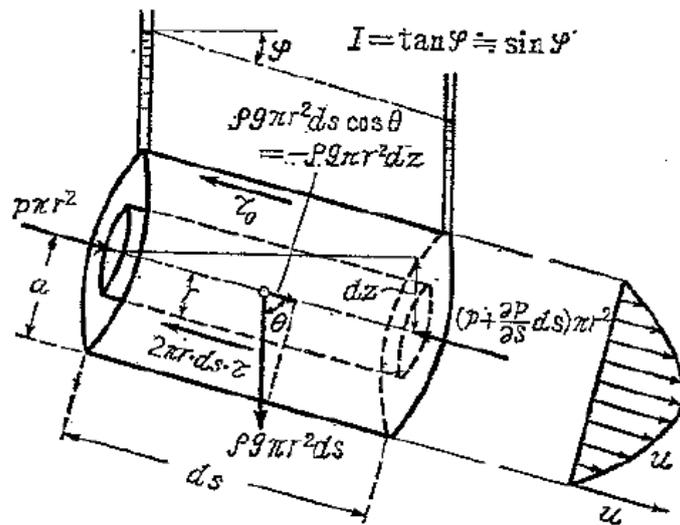


図-3 円管路層流流れ

円管路内を層流状態で流れている定常流れの流速分布を導こう。図-3のような円管路内の微小円柱要素を考える。この要素に働く力の釣り合いは以下の通りである。

$$p\pi r^2 - \left(p + \frac{dp}{ds} ds \right) \pi r^2 + \rho g \pi r^2 \cdot ds \cdot g \cos \theta - 2\pi r \cdot ds \cdot \tau = 0 \quad (1)$$

ここで、 p は圧力、 τ はせん断応力、 s は流下方向の座標（水平方向から θ だけ傾いている）、 r は管の中心を原点とした管径方向の座標である。

式 (1) を整理すると

$$\tau = -\frac{\rho g r}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) = \frac{\rho g r}{2} I \quad (2)$$

ここで、 $I = -\frac{d}{ds}\left(\frac{p}{\rho g} + z\right)$ である。 I は動水勾配、 a は管の半径、 $\cos\theta = -dz/ds$ 、 z は基準面から管中心までの高さである。 $r=a$ (壁面) のとき $\tau = \rho g a I / 2 = \tau_0$ とすれば、せん断応力 τ は次式となる。

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{a} \quad (3)$$

せん断応力分布は管中央で 0、管壁で τ_0 となる直線分布である。これは等流であれば層流だけでなく乱流の場合も成立する。次に s 軸方向流速 u の r 方向分布を求めよう。せん断力と変形速度の関係は

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad (4)$$

である (式(4)は r 方向に流速が減少する (速度勾配は負) ため負号を付けて正にしている。). 式 (2) を用いて

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\rho g r}{2} I = -\mu \frac{du}{dr} \\ \frac{du}{dr} &= -\frac{\rho g I}{2\mu} r \end{aligned} \quad (5)$$

r で上式を積分すれば次式を得る。

$$u = -\frac{\rho g I}{4\mu} r^2 + C = -\frac{g I}{4\nu} r^2 + C \quad (6)$$

粘性流体は固体壁面で流速が 0 となる (付着の条件) ので境界条件は $u=0$ at $r=a$ となる。したがって最終的に次式を得る。

$$u = \frac{g I}{4\nu} (a^2 - r^2) \quad (7)$$

層流の管路定常流れの流速分布は放物線分布になることが分かる。これを Hagen-Poiseuill (ハーゲン・ポアズイユ) 流れという。

流量 Q 、断面平均 v はそれぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^a 2\pi r \cdot u dr = \int_0^a 2\pi r \frac{g I}{4\nu} (a^2 - r^2) dr = \frac{\pi g I}{2\nu} \int_0^a (ra^2 - r^3) dr = \frac{\pi g I}{2\nu} \left[\frac{a^2}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^a = \frac{\pi a^4 g I}{8\nu} \\ v &= \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2 g I}{8\nu} \end{aligned}$$

補足：力の釣り合いから Hagen-Poiseuill 流れを誘導したが、Navie-Storks の方程式から直接導くことができる。この場合円筒座標系 (r, θ, s) で記述された Navie-Storks の方程式を用いる。流れの流速成分は u (s 方向成分, 流下方向) のみであり、さらに u は θ, s 方向には変化しない。この場合 Navie-Storks の方程式は

$$0 = -\rho g \frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds} + \mu \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right) \quad (8)$$

となる (教科書 p.139 式(4.47)を参照。教科書の式において z を s に、 v_z を u と読み替える。). 連続の式は自動的に満足される。上式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\rho g} \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right) &= \frac{d}{ds} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = -I \\ \frac{\mu}{\rho g r} \left(r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \right) &= \frac{\mu}{\rho g r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -I \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{gI}{\nu} r \quad (9)$$

境界条件は $du/dr=0$ at $r=0$ (管内流速分布の中心部に関しての対称性), $u=0$ at $r=R$ (管壁で流速 0) であるので, 式 (9) を二度積分し境界条件を用いれば式 (7) を得る.

2-2 開水路の等流の流速分布

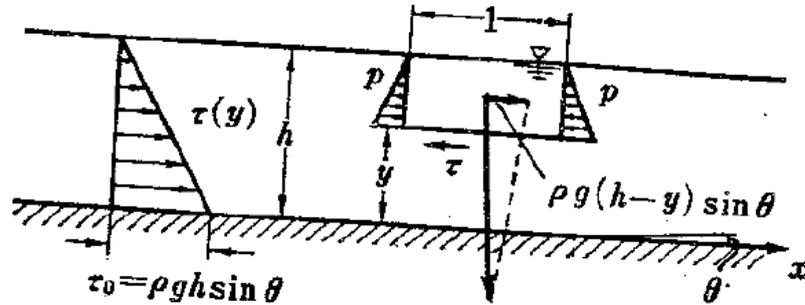


図-4 層流の開水路流れ

図-4 に示すような幅の広い長方形断面 (幅方向の流速や変化の無い鉛直 2 次元的な流れと考えて良い. つまり単位幅で考える.) 開水路に水が定常・等流かつ層流状態で流れている. このときのせん断応力分布, 流速分布および断面平均流速を求めよう.

座標は流れ方向を x , 水深上向き方向を y とする (底面で $y=0$). この場合, y 方向流速は 0 である. また定常流なので時間微分も 0 である. 等流より流れ方向 (x 方向) の変化はない. これらのことを考慮すればナビエ・ストークスの式は以下のように簡略化される.

$$0 = \rho g \sin \theta + \frac{d\tau_{yx}}{dy} = \rho g \sin \theta + \frac{d\tau}{dy} \quad (10)$$

(図-3 と比較して θ の定義位置が異なっていることに注意. せん断応力は τ_{yx} の表示が正確であるが図-4 に従い単に τ と表記する.) 式(10)を積分して

$$\tau = \rho g (h - y) \sin \theta \quad (11)$$

となり, 直線的な分布となる. ここで, 水表面と空気との摩擦抵抗は通常極めて小さいので, 水表面 ($y=h$) でせん断力 0 という境界条件を用いた.

$\tau = \mu \frac{du}{dy}$ (y 方向に流速 u が増加する. 速度勾配は正.) を式 (11) に代入して

$$\mu \frac{du}{dy} = \rho g (h - y) \sin \theta \quad (12)$$

を得る. 上式を底面で流速 0 という境界条件のもとに積分すると, 流速分布 u , 断面 (水深) 平均流速 v は以下のようなになる.

$$u = \frac{g \sin \theta}{\nu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) \quad (13)$$

$$v = \frac{1}{h} \int_0^h u dy = \frac{gh^2 \sin \theta}{3\nu} \quad (14)$$