粘性流体の力学(4)　　レイノルズ方程式
Dynamics of viscus fluid #4
Reynolds equation
教科書 pp.188-191

1.　乱流の運動方程式
1-1 レイノルズ分解（Reynolds decomposition）
乱流は流れの中の流体粒子が不規則な運動をする流れである．乱流状態の流れの中に流速計を入れて流速を計測すれば，図-1 のようなデータが得られる．横軸は時間，縦軸は流速である．不規則に変化する乱流においては，平均的な流速に着目して解析する．つまり流速の瞬間値を平均成分と変動成分に分解し，平均成分について解析を行う．図-1 を例にすれば，瞬間流速値 u を時間平均値 $\bar{u}$ と平均値からの偏差（変動成分）u' に分解し $u=\bar{u}+u'$ と書き表すことができる．このような分解をレイノルズ分解とよぶ．

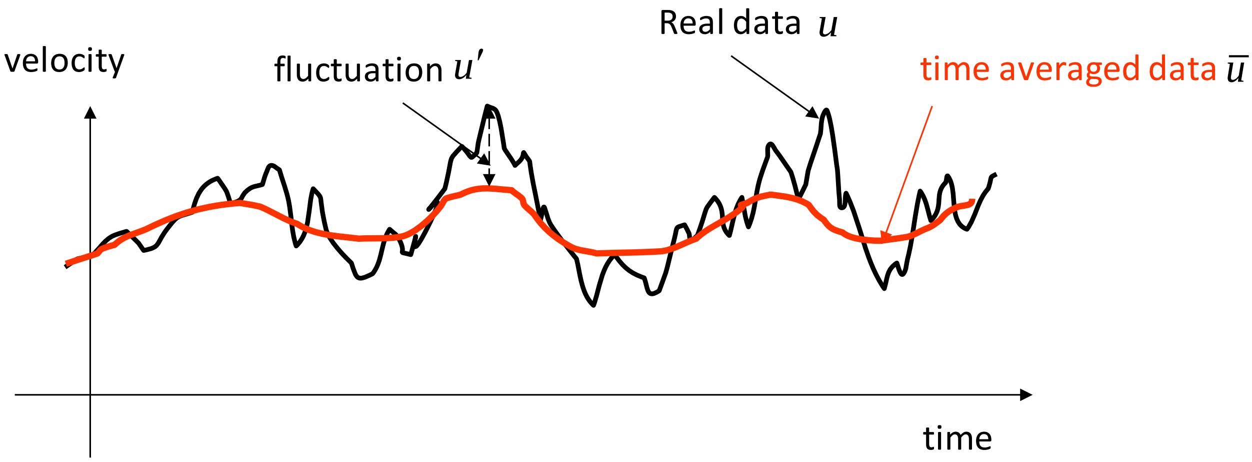

図-1　乱流の時系列と平均操作された時系列（変動が T よりも大きい成分を含む場合）

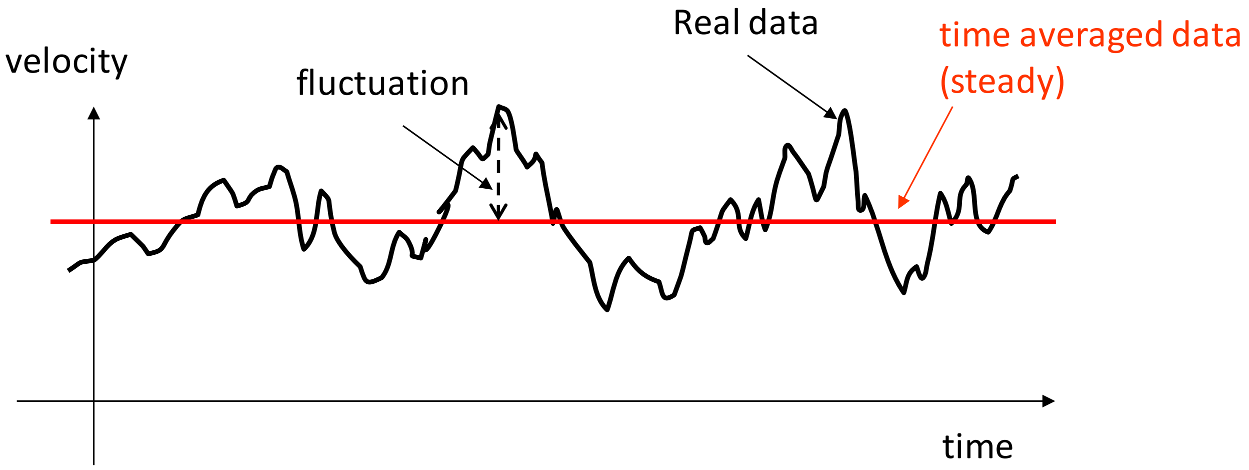

図-2　乱流の時系列と平均操作された時系列（すべての変動が T よりも短い場合）

時間平均操作は次のように行う．

$$\bar{u}(x,y,z,t)=\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}u(x,y,z,t)dt$$

T は平均をとるための時間間隔である．例えば T=5 分であればある時刻 t を中心に前後 2.5 分間（合計 5 分）のデータを用いて平均値を計算することになる．図–1 に示すように時間間隔 T よりも短い時間変動（例えば上記の例では変動間隔が 1 分や 2 分など）は平均操作で変動がなくなり，滑らかな変動の時系列になる．　ただし T よりも大きな時間変動の成分は除去されずに残ることになる．

もし得られたデータの時間変動間隔が T よりも小さければすべての変動はなくなり図–2 のように定常状態の時系列が得られる．基本的に乱流は時間的，空間的に動揺している流れであるため瞬間流速値は定常状態にはならないが，時間平均値は定常になり得ることを覚えておこう．

1-2 レイノルズ方程式

乱流は複雑な変動を行うが，乱流状態にある流れの解析は瞬間流速値でなく時間平均値で議論すれば十分なことが多い．また時間平均値であれば定常状態になり得るため都合の良い場合も多々ある．前回学習したナビエ・ストークス方程式は原理的に層流も乱流も取り扱える式であるが，この方程式は瞬間流速値を対象とした式である．この式から得られた解（時系列）の時間平均をとれば時間平均値が得られる．実際に解を得ようとすれば解析解を得ることは見込めないので，コンピューターを用いた数値計算が現実的な方法である（数値解を求めることになる）．この際乱流の数値計算は多くのメモリーと計算時間を必要とする．そこでナビエ・ストークス方程式ではなく乱流解析用の運動方程式は必要となってくる．この節では乱流解析用の運動方程式を誘導する．

誘導に必要な平均操作に関する演算側について述べておく．

(1)平均量 $\bar{U}$ の平均は同じ平均量である． $\bar{\bar{U}} = \bar{U}$

(2)変動量 u'の平均は 0 である． $\overline{u'} = 0$

(3)瞬間値 a と b の和の平均とそれぞれを平均したものの和は同じである． $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$

(4)平均量 $\bar{a}$ （または一定値 c）と瞬間値 U の積の平均はそれぞれの平均量の積に等しい．

$\overline{cU} = c\bar{U}$ ， $\overline{\bar{a}U} = \bar{a}\bar{U}$

(5)微分操作と平均操作は順序を交換できる． $\overline{\dfrac{\partial U}{\partial x}} = \dfrac{\partial \bar{U}}{\partial x}$

(6)積分操作と平均操作は順序を交換できる． $\overline{\int U dx} = \int \bar{U} dx$

さて，流速，圧力，せん断力を次のように平均成分（¯）と変動成分（’）に分離する．

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= \bar{u}(x,y,z,t) + u'(x,y,z,t) \\
v(x,y,z,t) &= \bar{v}(x,y,z,t) + v'(x,y,z,t) \\
w(x,y,z,t) &= \bar{w}(x,y,z,t) + w'(x,y,z,t) \\
p(x,y,z,t) &= \bar{p}(x,y,z,t) + p'(x,y,z,t) \\
\tau(x,y,z,t) &= \bar{\tau}(x,y,z,t) + \tau'(x,y,z,t)
\end{aligned}
$$

せん断力 τは添え字が必要であるが，ここでは簡単のため省略している．前述のように乱流は時間的空間的に流速，表面力が変化するため瞬間値は必ず場所と時間の関数となる．一方平均成分は定常（時間の関数でなくなる）や等流（流下方向座標の関数でなくなる）などにもなり得るが，一般的に場所と時間の関数としている．変動量は不規則な乱れを表すのでこの量も必ず場所と時間の関数となる．

これらまず連続の式に代入する．

$$
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0
$$

$$
\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial z} = 0
$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0 \tag{1}$$

式(1)に平均操作を施し，平均操作の演算則を考慮すれば次式を得る．

$$\overline{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}}=0$$

$$\overline{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}+\overline{\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}}+\overline{\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}}+\overline{\frac{\partial u'}{\partial x}}+\overline{\frac{\partial v'}{\partial y}}+\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}}=0$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\bar{v}}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{\bar{w}}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w'}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w'}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=0 \tag{2}$$

式(2)が平均流に関する連続の式である．式(2)は平均値を表す over bar が付いているだけで形式的には通常の連続の式と同じである．

　つぎに平均流に関する運動方程式を考える．運動量保存の法則から導かれる運動量方程式は粘性流体の場合次のようになる．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial uu}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial vu}{\partial x}+\frac{\partial vv}{\partial y}+\frac{\partial vw}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial wu}{\partial x}+\frac{\partial wv}{\partial y}+\frac{\partial ww}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{5}$$

この運動量方程式にさきほどの流速や圧力を代入し平均操作を施す．ここでは x 方向の式（式(3)）について考えていく．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}+u')(\bar{u}+u')}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{u}+u')(\bar{w}+w')}{\partial z}\\&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial z^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{u}+u'\bar{u}+\bar{u}u'+u'u')}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{v}+u'\bar{v}+\bar{u}v'+u'v')}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{w}+u'\bar{w}+\bar{w}w'+u'w')}{\partial z}\\&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial z^2}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

式(6)に平均操作を施し，平均操作の演算則を考慮すれば次式を得る．

$$\overline{\frac{\partial\left(\overline{u}+u'\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\overline{u}\overline{u}+u'\overline{u}+\overline{u}u'+u'u'\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\overline{u}\overline{v}+u'\overline{v}+\overline{u}v'+u'v'\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\overline{u}\overline{w}+u'\overline{w}+\overline{w}w'+u'w'\right)}{\partial z}}$$
$$\overline{=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\overline{p}+p'\right)}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2\left(\overline{u}+u'\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\overline{u}+u'\right)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\left(\overline{u}+u'\right)}{\partial z^2}\right)}$$

$$\frac{\partial\overline{\left(\overline{u}+u'\right)}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{\left(\overline{u}\overline{u}+u'\overline{u}+\overline{u}u'+u'u'\right)}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\left(\overline{u}\overline{v}+u'\overline{v}+\overline{u}v'+u'v'\right)}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\left(\overline{u}\overline{w}+u'\overline{w}+\overline{w}w'+u'w'\right)}}{\partial z}$$
$$=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{\left(\overline{p}+p'\right)}}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2\overline{\left(\overline{u}+u'\right)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{\left(\overline{u}+u'\right)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{\left(\overline{u}+u'\right)}}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\frac{\partial\left(\overline{u}\overline{u}+\overline{u'u'}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\overline{u}\overline{v}+\overline{u'v'}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\overline{u}\overline{w}+\overline{u'w'}\right)}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u}\overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{u}\overline{w}}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial\left(-\overline{u'u'}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(-\overline{u'v'}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(-\overline{u'w'}\right)}{\partial z} \qquad (7)$$

式(7)の左辺を連続の式を用いて書き直せば以下のようになる．

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial\left(-\overline{u'u'}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(-\overline{u'v'}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(-\overline{u'w'}\right)}{\partial z} \qquad (8)$$

他の方向も同様にして

$$\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial\left(-\overline{v'u'}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(-\overline{v'v'}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(-\overline{v'w'}\right)}{\partial z} \qquad (9)$$

$$\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial\left(-\overline{w'u'}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(-\overline{w'v'}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(-\overline{w'w'}\right)}{\partial z} \qquad (10)$$

式(8)～(10)を Reynolds（レイノルズ）の運動方程式（あるいはレイノルズ方程式）と呼ぶ．乱流解析では式(2)とレイノルズの運動方程式を用いる．

1-3 レイノルズ応力（Reynolds stress）

式(8)～(10)は式(3)～(6)と比較すると式(8)～(10)の右辺第 4～6 項が新たに付加された．この項はナビエ・ストークス方程式の左辺の慣性項から生じている．この項は非線形性であるため乱流現象は非線形性が卓越した不規則な運動をする流体現象であることが理解される．

$-\overline{u'u'}$， $-\overline{u'v'}$ などは数学的には速度変動量の相関を意味し，物理的には乱れによるせん断応力を意味する．これらをレイノルズ応力と呼ぶ．レイノルズ応力の応力テンソルは以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} -\rho\overline{u'u'} & -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{u'w'} \\ -\rho\overline{v'u'} & -\rho\overline{v'v'} & -\rho\overline{v'w'} \\ -\rho\overline{w'u'} & -\rho\overline{w'v'} & -\rho\overline{w'w'} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

上式において応力の次元にするために密度ρを掛けている（密度を掛けた表示が応力としては正しい表示である.）.

さて，式(8)～(10)において新たな物理量としてレイノルズ応力が付加されたが，このままでは未知量が 6 個（式(11)では 9 個の要素があるが対象性より 6 個になる）増えてしまい方程式系が閉じない．そこで，レイノルズ応力を平均流速と結びつける必要がある．

粘性によるせん断力と同じような形式（第 8 回のプリント参照）でレイノルズ応力を表現する．

$$-\rho\overline{u'u'} = \rho\nu_e\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\right)$$
$$-\rho\overline{v'v'} = \rho\nu_e\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}\right)$$
$$-\rho\overline{w'w'} = \rho\nu_e\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\right)$$
$$-\rho\overline{v'w'} = -\rho\overline{w'v'} = \rho\nu_e\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}\right)$$
$$-\rho\overline{u'w'} = -\rho\overline{w'u'} = \rho\nu_e\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right)$$
$$-\rho\overline{u'v'} = -\rho\overline{v'u'} = \rho\nu_e\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right)$$

ν_e は渦動粘性係数（うずどうねんせいけいすう）とよばれる．最終的な式は以下のようになる．

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z} = X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\nu_e\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\nu_e\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\nu_e\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right)\right\}$$
$$\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{v}}{\partial z} = Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\nu_e\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\nu_e\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\nu_e\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}\right)\right\}$$
$$\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{w}}{\partial z} = Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\nu_e\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\nu_e\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\nu_e\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\right)\right\}$$

乱流解析においては分子粘性によるせん断応力はレイノルズ応力よりも小さいために無視されることが多い．この場合右辺第三項は省略される．

補足：式(3)の左辺がDu/Dtと等しいことの検討

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial uu}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}$$
$$=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

式(4)，式(5)も同様である．