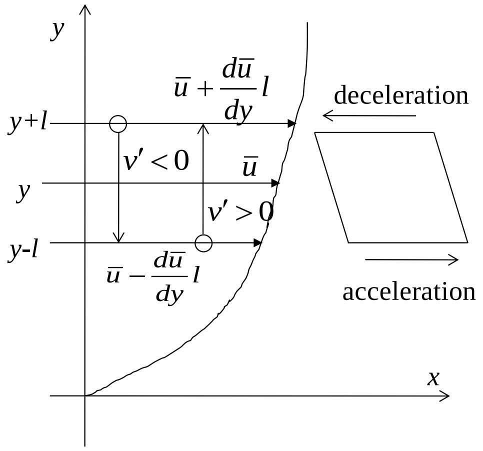
粘性流体の力学(5)　　乱れの輸送理論
Dynamics of viscus fluid #5
Theory of turbulence transportation
教科書 pp.191-195

1. レイノルズ応力

レイノルズ応力の物理的な意味を考えてみよう．図−1 のような x 方向の時間平均流速分布 $\bar{u}$ を考える．



図−1 乱れによる運動量の輸送（レイノルズ応力）

$\bar{u}$ は定常（時間平均流速は定常になり得る）とする．y の高さの流速を $\bar{u}$ とする．l だけ離れた上面（y+l）と下面（y-l）の流速を $\bar{u}+u'$ とする．y の高さの面をはさんで流体塊が下から上へ移動する場合（v'>0）を考える．移動する流体塊の x 方向流速は平均的には y の位置のよりも遅い流速（$\bar{u}+u'<\bar{u}$）であるので，u'<0 と考えられる．よって x 方向運動量 $\rho\left(\bar{u}+u'\right)$ が v'の速度で上方へ運ばれる．したがって運動量フラックスは時間平均的に以下のようになる．

$$\overline{\rho\left(\bar{u}+u'\right)} = \rho\overline{u'v'} < 0 \tag{1}$$

次に y の高さの面をはさんで上から下へ流体塊が移動する場合（v'<0）を考えよう．流体塊の x 方向流速は $\bar{u}+u'>\bar{u}$ であるので，u'>0 と考えられる．運動量フラックスは

$$\overline{\rho\left(\bar{u}+u'\right)} = \rho\overline{u'v'} < 0 \tag{2}$$

となる．いずれも $\rho\overline{u'v'}<0$ となる．せん断力を正で定義するため負号をつけて $\tau=-\rho\overline{u'v'}>0$ となる．

このようにレイノルズ応力は運動量の交換を表す訳であるが，運動量が交換すると y+l の高さの面と y-l の面に力が作用する．つまり図−1 に示すように上面は流速を減速させる方向に力が働き，下面には加速する方向に力が働く．よって乱れの作用によって流速分布は一様に近づこうとする．

2. 混合距離モデル（Mixing length model）

乱流におけるせん断応力は分子粘性による応力と乱れ（変動成分）による応力（レイノルズ応力）が存在する．図−1 に示している流れの場合，せん断応力は次のように記述される．

$$\tau = \mu\frac{d\bar{u}}{dy} - \rho\overline{u'v'} \tag{3}$$

乱れ（流速変動成分）u'，v'を作り出す要因は流速の速度差（速度勾配）である．したがって乱れの大きさは平均流速の空間的な勾配に比例すると考えられる．よって u'，v'は以下のように記述できる．

$$u' \sim l_1 \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad v' \sim l_2 \frac{d\bar{u}}{dy}$$

l_1，l_2 は速度勾配を速度にするための長さスケールである．　乱れの積をとって平均すれば次式を得る．

$$-\overline{u'v'} = \overline{cl_1 l_2 \frac{d\bar{u}}{dy}\frac{d\bar{u}}{dy}} = cl_1 l_2 \frac{d\bar{u}}{dy}\frac{d\bar{u}}{dy} \tag{4}$$

c は比例定数である．密度 r を掛けて，また $cl_1l_2=l^2$ とおけば次式を得る．

$$-\rho\overline{u'v'} = \rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|\frac{d\bar{u}}{dy} \tag{5}$$

絶対値記号はレイノルズ応力の符号と速度勾配の符号を一致させるために付いている．l は流体塊の混合運動のスケールに相当し，混合距離（mixing length）といわれる．これを Prandtl（プラントル）の混合距離の仮説（混合距離理論）という．

　分子粘性によるせん断応力が$\tau=\mu$du/dy で表されるようにレイノルズ応力も$\tau=\rho\nu_e$du/dy と書くことができる．このν_eを Boussinesq（ブシネスク）の渦動粘性係数とよぶ．式(5)より

$$\nu_e = l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \tag{6}$$

となる．

3.　対数分布側（Log law）

円管内乱流の流速分布を求めよう．平均流に関して定常・等流を前提とする．以下に示す式では平均流を表すオーバーバー（¯）は省略している．

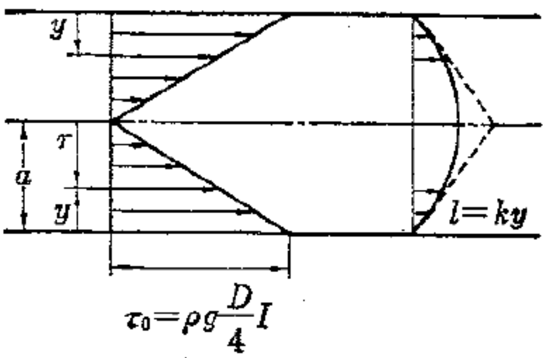


図-2 円管内の流速分布

壁面を原点とし管の中心に向かう方向に y 軸をとる．せん断応力分布は力の釣り合いより直線分布となる（第 10 回の講義プリントを参照）．

$$\tau = \tau_0\left(1-\frac{y}{a}\right) \tag{7}$$

ここで，a は管の半径，τ_0 は壁面におけるせん断応力である．混合距離モデルよるせん断応力は

$$\tau = \tau_0\left(1-\frac{y}{a}\right) = \rho\left(\nu+\nu_e\right)\frac{du}{dy} = \rho\left(\nu + l^2\left|\frac{du}{dy}\right|\right)\frac{du}{dy} \tag{8}$$

で表されるが，壁面の極近傍を除いて分子粘性の影響は小さい．Prandtl に従って混合距離 l を $l=\kappa y$ とおく．κは比例定数でカルマン定数（Karman constant）という．<u>y/a<<1 でかつ分子粘性の影響を受けない</u>

領域を考える．このような領域では分子粘性による応力は無視でき，せん断応力は一定値τ_0となる（このような領域を constant stress layer とよぶ．）．式(8)は以下のようになる．

$$\tau = \tau_0 = \rho \nu_e \frac{du}{dy} = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \tag{9}$$

式(9)の右辺では速度勾配の絶対値記号を外して速度勾配の二乗で表している．両辺を密度で除して

$$\frac{\tau_0}{\rho} = u_*^2 = \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \tag{10}$$

ここで$u_* \left(= \sqrt{\tau_0 / \rho} \right)$は摩擦速度である．水理 I ですでに学習しているが速度となっているが物理的には速度でなく壁面せん断応力であることに注意しよう．式(10)の平方根をとれば

$$u_* = \kappa y \frac{du}{dy}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\kappa y} \tag{11}$$

式(11)を積分すると次式を得る．

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C \tag{12}$$

ここで ln は自然対数，C は積分定数である．y=y_0 で u=0 という境界条件を導入すれば

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} = \frac{2.3}{\kappa} \log \frac{y}{y_0} \tag{13}$$

ここで log は常用対数である．式(13)を Prandtl-Karman の対数分布側という．κは通常 0.4 程度の値をとる．壁面近くという仮定から導かれているが，実際には管の中心部まで対数分布側が成立することを Nikuradse が実験的に確認している．

第 10 回のプリントに記述しているように層流の管内流速分布は放物線であるが，乱流の場合は鉛直方向の運動量輸送によって流速分布が一様化され対数分布となる．

さて対数分布側は壁面（y=0）では流速が$-\infty$となるので，壁面の極近傍（y/a<<1）ではこの分布は成立しない. 壁面極近傍は粘性底層と呼ばれる領域があり, 壁面上部の乱流とは異なる流れ方をしている.