

粘性流体の力学(6) 流速分布と摩擦損失係数

Dynamics of viscous fluid #6

Velocity distribution and friction factor

教科書 pp.195-200

1. 滑らかな壁（滑面）における流速分布

前回の講義プリントで乱流における流速分布が以下のような対数分布になることを示した。

$$\frac{u}{u_*} = \frac{2.3}{\kappa} \log \frac{y}{y_0} \quad (1)$$

上式には便宜的な境界条件 ($y=y_0$ において $u=0$) を導入しているため y_0 を含んでいるが流速の絶対値を決めるうえで具体的に y_0 を決定する必要がある。 y_0 は壁面近傍の物理量で決定されることが期待される。壁面が滑らかな場合は、壁面せん断力 τ_0 、流体の密度 ρ 、流体の動粘性係数 ν で決定されるであろう。次元解析より

$$\frac{y_0 \sqrt{\tau_0 / \rho}}{\nu} = \frac{y_0 u_*}{\nu} = \text{const.} \quad (2)$$

が得られる。式(2)の関係を壁法則という。これを式(1)に代入すれば次式を得る。

$$\frac{u}{u_*} = 5.75 \log \frac{u_* y}{\nu} + A \quad (3)$$

ここでカルマン定数 κ は 0.4 としている。A は実験から決定される定数で $A=5.5$ である。

2. 粘性底層 (Viscous sub-layer)

壁面の極近傍では分子粘性が卓越する。前回のプリントの式(8) (以下に示す)

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right) = \rho(\nu + \nu_e) \frac{du}{dy} = \rho \left(\nu + l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \right) \frac{du}{dy}$$

において渦動粘性係数 ν_e が無視できる。また壁面極近傍ということより $y/a \ll 1$ である。したがって上式は以下のように簡略化される。

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\tau_0}{\rho} = u_*^2 = \nu \frac{du}{dy} \quad (3)$$

式(3)を積分すると次式のようになる。

$$u = \frac{u_*^2 y}{\nu} + C \quad (4)$$

壁面では流速が 0 ($y=0$ で $u=0$) となることより積分定数 C は $C=0$ となる。式(4)は以下の様になる。

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu} \quad (5)$$

壁面の極近傍では流速分布は直線分布となることが分かる。式(5)が成立する領域を粘性底層と呼ぶ。

式(5)と式(3)の交点が粘性底層の厚さを与える。粘性底層の厚さを δ_L とすれば

$$\frac{u_* \delta_L}{\nu} = 11.6 \quad (6)$$

である。実際には粘性底層と乱流域の間には中間的な遷移領域 (buffer layer) が存在する。

図-1 (教科書 p.196 図 5.23 も参照すること) は滑らかな管路の流速分布を示している。この図は片対数グラフであることに注意しよう (横軸が対数となっている)。図-1 において直線が式(3)で湾曲した線が式(5)である。両者の交点が式(6)である。黒丸と白丸は Nikuradse (ニクラッチェ) が行った実験デー

ターである。

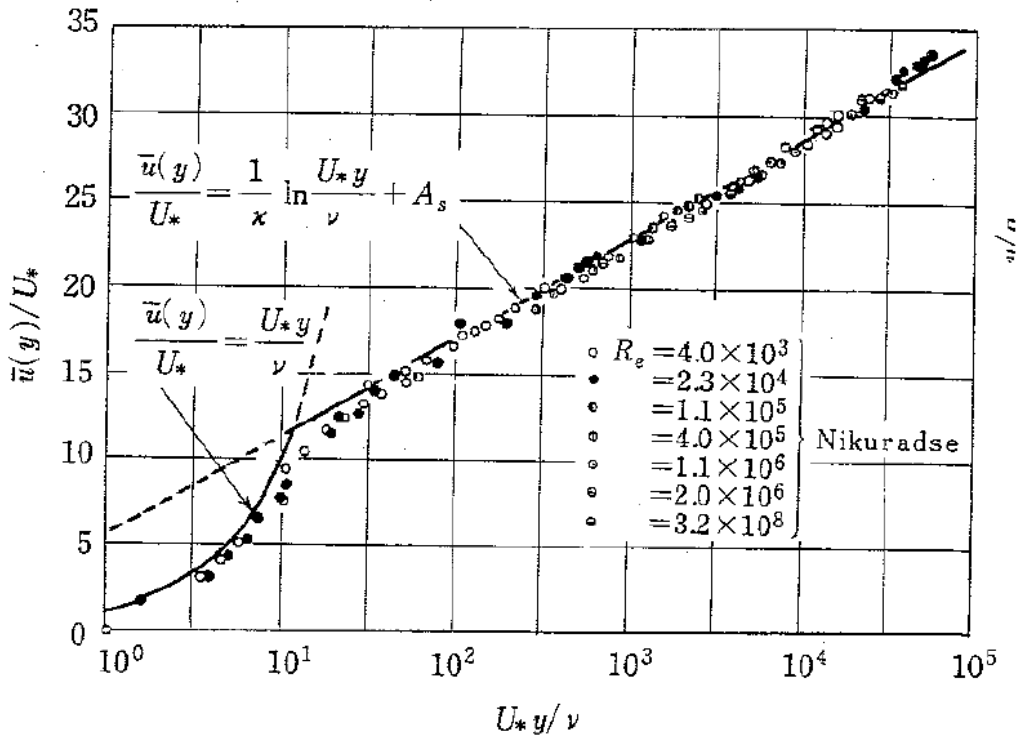


図-1 滑らかな管路の流速分布

実験データと式(3), (5)の適合性は良好であるが両式の交点付近ではデータが実線から離れている。ここが遷移層である。

3. 粗い壁（粗面）における流速分布

管壁が粗い場合は、 y_0 は壁面せん断力 τ_0 、流体の密度 ρ 、流体の動粘性係数 ν に加えて壁面の粗さ k （粗度とよぶ）で決定される。次元解析より

$$\frac{y_0}{k} = f\left(\frac{u_* k}{\nu}\right) \tag{7}$$

となる。粗面の場合の対数分布則は以下の様になる。

$$\frac{u}{u_*} = 5.75 \log \frac{y}{k} + A\left(\frac{u_* k}{\nu}\right) \tag{8}$$

A は無次元パラメーター $u_* k / \nu$ の関数である。 A の関数形は理論的には決まらず実験で決める。

4. 水理学的粗滑面

壁面が滑らかか粗いかは、壁の粗度高さ k と粘性底層の厚さ δ_L の兼ね合いで決まる。つまり k が δ_L よりも大きければ粗面であり、小さければ滑面となる。式(6)からわかるように摩擦速度が大きくなると δ_L は小さくなる。つまり流れが速くなると粘性底層は薄くなる。粗度高さは材質によって決まるが、 δ_L 粗は流れの状況で決まる。その様子を図-2に示す。粗度高さが同じであっても流れの状況で滑面になったり粗面になったりする。

δ_L は ν/u_* に比例する。粗滑の指標は k / δ_L であるので δ_L のかわりに ν/u_* を用いれば $u_* k / \nu$ が得られる。これは式(7)の A のパラメーターである。 $u_* k / \nu$ を粗さのレイノルズ数（または砂粒レイノルズ数）と呼ぶ。Nikuradseは実験から次のように流速分布を整理した。

(滑面： $\frac{u_*k}{\nu} \leq 5.0$) : $\frac{u}{u_*} = 5.75 \log \frac{u_*y}{\nu} + 5.5$

(粗滑遷移領域： $5.0 < \frac{u_*k}{\nu} \leq 70$) : $\frac{u}{u_*} = 5.75 \log \frac{y}{k} + A \left(\frac{u_*k}{\nu} \right)$

(粗面： $70 < \frac{u_*k}{\nu}$) : $\frac{u}{u_*} = 5.75 \log \frac{y}{k} + 8.5$

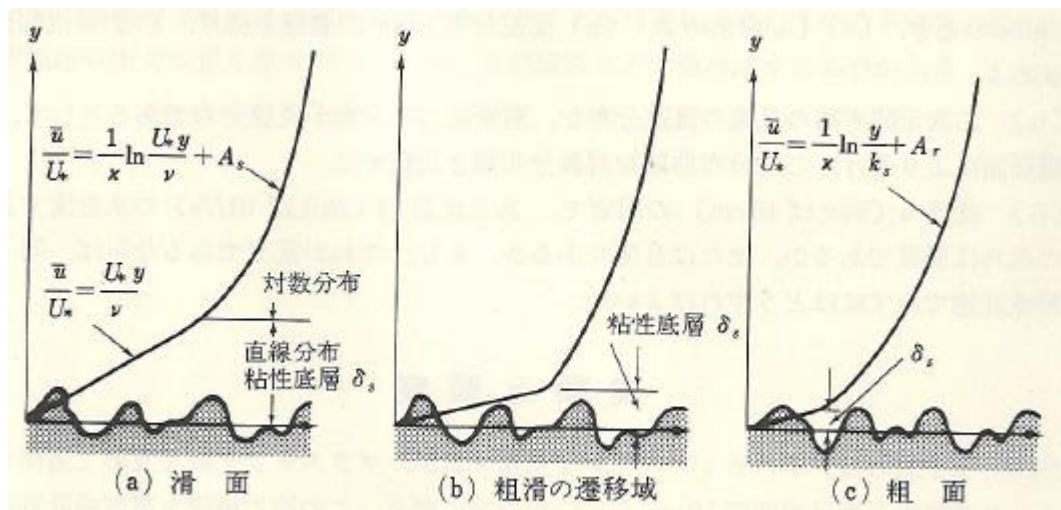


図-2 壁面の粗滑 (教科書 p. 198 参照)

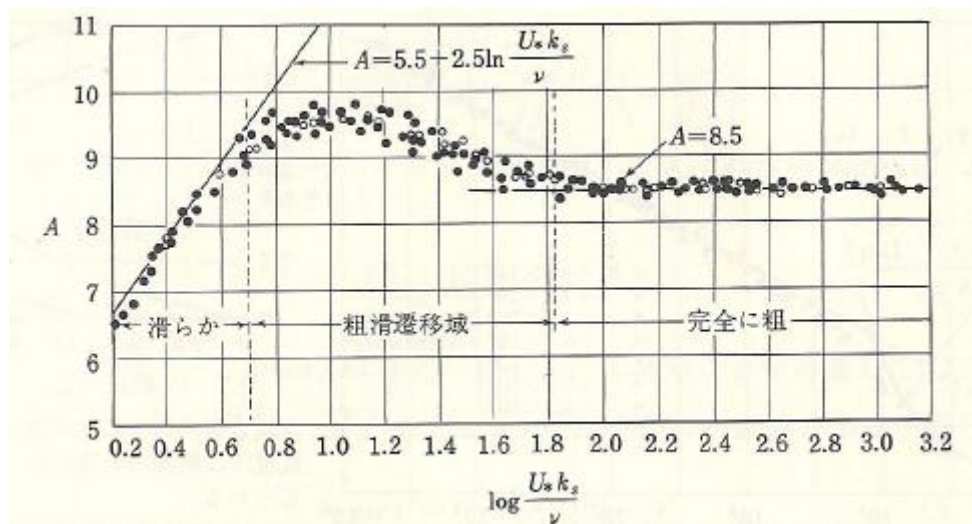


図-3 管路壁面の粗滑と流速分布の定数項 A の関係 (教科書 p. 198 参照)

図-3は流速分布の定数項 A の粗さのレイノルズ数の関係を示したものである。この図において滑面領域では定数項に粗さのレイノルズ数の対数が付加された形になっていることに注意しよう。この図面では粗さのレイノルズ数の増加とともに A も増加しているが実際には定数項 A は 5.5 で一定値である。

詳細な誘導は割愛するが流速分布を積分することによって流れの抵抗則を導くことができる。その結果だけを以下に示す。

$$\text{滑らかな円管乱流} : \frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.8$$

$$\text{粗い円管乱流} : \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \frac{k_s}{d} + 1.14$$

$$\text{滑面・遷移} : \frac{1}{\sqrt{f}} = 1.74 - 2.0 \log \left(\frac{2k_s}{d} + \frac{18.7}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$$

ここで f は摩擦損失係数, Re はレイノルズ数, k_s は相当粗度, d は管径である。

参考 (教科書 pp.73-75 も参照すること) : 相当粗度 (equivalent roughness)

Nikuradse は一様な粒径の砂を管壁に貼り付けて実験を行った。そのため粗度高さは一義的に決定された (粒径がそのまま粗度高さ)。しかしながら実際の管路や開水路の壁面は一様な粗度高さではなく、非一様である。非一様な粗度高さを持つ壁面の抵抗特性と一様な粗度高さをもつ壁面の抵抗特性が一致した場合、一様な粗度高さは非一様な粗度高さと同力学的に等価となる。このような粗度高さを相当粗度とよぶ。

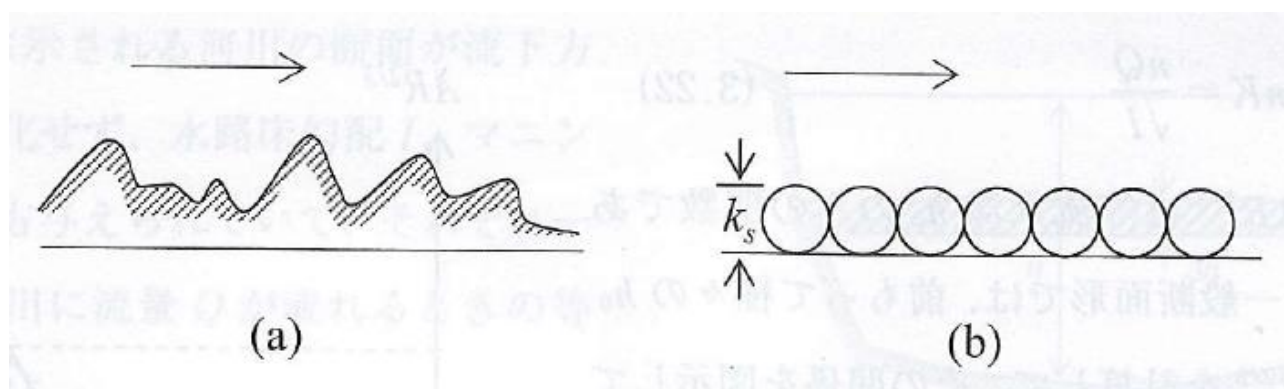


図-4 相当粗度 k_s