完全流体の力学(1)　流れの表示と実質微分
Dynamics of perfect fluid #1
Description of flow and substantial derivative

教科書 pp.115-122

1.　流体・流れの種類

完全流体（perfect fluid）: 粘性（viscosity）を持たない流体。
粘性流体（viscos fluid）: 粘性を有する流体。実在流体とも呼ばれる。
圧縮性流体（compressible fluid）: 圧縮性を有する流体。
非圧縮性流体（incompressible fluid）: 圧縮性を持たない流体。
　非圧縮性完全流体：理想流体とも呼ばれる。水の波、翼理論
　圧縮性完全流体：水撃作用（管路の急閉塞)、音速以上の翼理論
　非圧縮性粘性流体：土木・建設工学が取り扱う流体。管・開水路流れ、流体抵抗
　圧縮性粘性流体：実在する流体は厳密にはすべてこれである。高速空気流の抵抗

定常流（Steady flow）: 流速、圧力、水深などが時間的に変化しない流れ。
不定流・非定常流（unsteady flow）: 流速、圧力、水深などが時間的に変化する流れ。
等流（uniform flow）: 定常流の中で水深や流速などが流下方向に変化しない流れ。
不等流（non-uniform flow）: 水深や流速などが流下方向に変化する流れ。
　定常等流
　定常不等流
　非定常不等流
　注）非定常等流は現実には存在しない

回転流れ（rotational flow）: 渦（正確には渦度）のある流れ。
非回転流れ（irrotational flow）: 渦のない流れ。

常流（subcritical flow）: 開水路流れで水深が比較的大きくゆっくりとした流れ。フルード数が 1 以下の流れ。中流・下流域の河川の流れ。
射流（supercritical flow）: 開水路流れで水深が小さく速い流れ。フルード数が 1 を超える流れ。上流域の河川に流れ、堰頂を超える流れ。

層流（laminar flow）: 乱れのない秩序だった流れ。
乱流（turbulent flow）: 乱れのある不規則な流れ。

2.　流体運動の調べ方

　例えば投手が投げた野球のボールの運動を調べるには、対象としている物体がはっきりしているので、ボールを追いかけて行けばよい（観測という意味で)。例えばボールの速度を計測するスピードガンやビデオ撮影によるスロー再生などはその良い例である。力学としては質点力学に相当する。それでは連続体である流体の運動はどのように記述すれば良いであろうか？これには二種類の方法がある。

2-1　Lagrange の方法

 連続体である流体にもその構成要素（流体粒子とよぶ）が存在するとして、先ほどの野球のボールの例のように流体粒子を追いかけてその運動を調べる。多数の流体粒子の運動を調べれば流体の運動（す

なわち流れ）が分かったことになる。このような方法を Lagrange（ラグランジュ）の方法と言う。例えば染料などを流し、それが広がっていく様子をビデオなどで撮影し解析を行う方法がこれにあたる。

2-2　Euler の方法

流れの場の各点において、各瞬間に流速や圧力などを調べる方法を Euler（オイラー）の方法という。流体の速度や圧力、密度を場所と時間の関数 $f(x,y,z,t)$として取り扱う方法である。流速計などを水の中に入れて計測する方法がこれにあたる。通常、水理学や流体力学の実験や現場観測ではこの方法が用いられる。

図-1 に両者の違いを比喩的に示す。

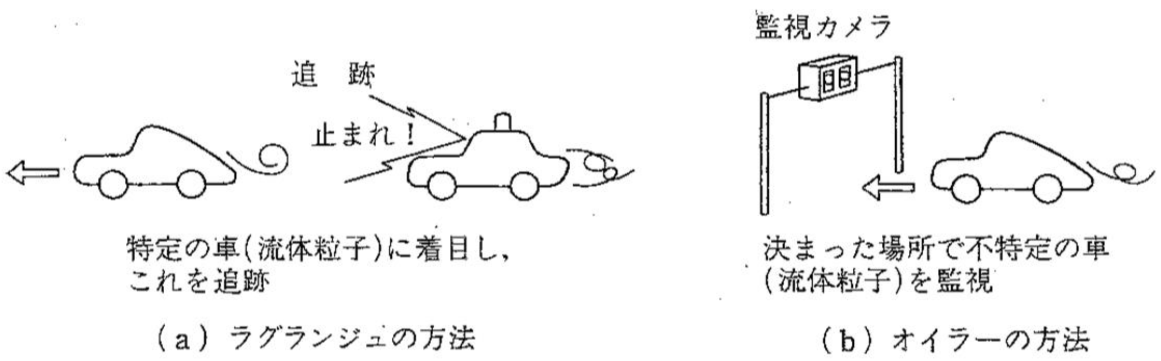


図-1　ラグランジュの方法とオイラーの方法のイメージ

3.　Euler 的立場での加速度

加速度とは同一質点の速度の**時間**変化率のことであり、質点力学やラグランジュ的な流体力学では対象粒子が特定されているので容易に $a=du/dt$ と書くことができる。u は対象としているは粒子（ここでは流体粒子）の流速であり a は対象としている流体粒子の加速度である。ラグランジュ的な立場では流体粒子の速度が 0 でないならば常に移動していることになり（流速が一定つまり加速度が 0 であったとしても）、定常状態にはなりえない。ラグランジュ的な立場で定常状態とは流れがなく静止している状況のことである。

さて一方、オイラー的な立場では加速度は単に時間的な変化率だけでなく場所による変化率が加わる。例えばホースで水撒きをする場合に、水を遠くに飛ばそうとしてホースの先端を握りつぶして出口を狭くするであろう。水が遠くに飛ぶのはホースの部分と出口部分で断面積が変化して結果として場による加速が生じたためである。

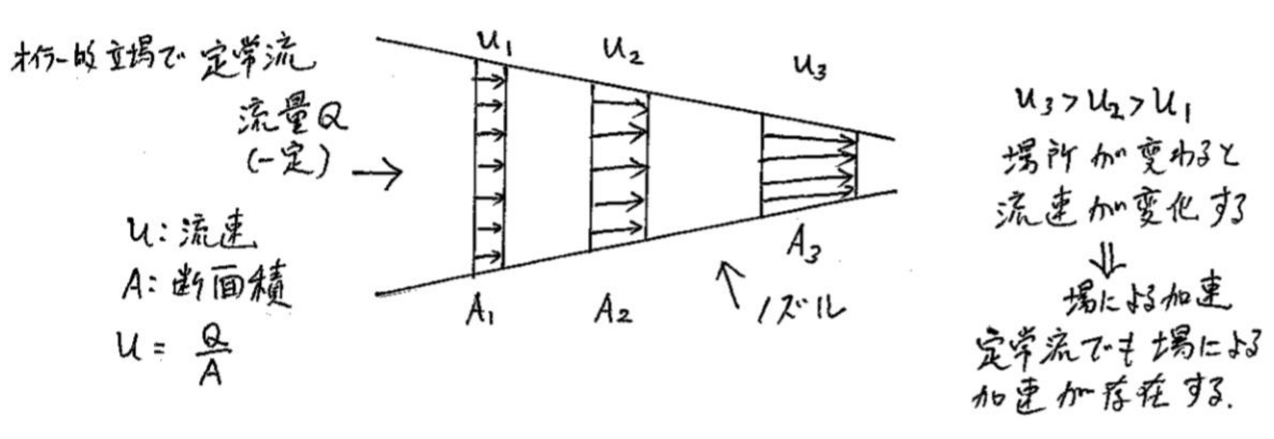


図-2　場による加速度

4　実質微分（substantial derivative）

ここで、ある流体粒子が時刻 t_0 に場（x,y,z）に存在しているとする。その流体粒子はある物理量$\theta(x,y,z,t)$を持っている。流体粒子は流れ（流速 $\mathbf{u}=(u,v,w)$）に乗ってδt 間輸送され時刻 $t_0+\delta t$ に場（$x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z$）に到着した。この間の物理量$\theta$の変化率について考える。

δt 後のθの値は Taylor 展開することで次式のように与えられる。

$$\theta(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t+\delta t) = \theta(x,y,z,t)$$
$$+\frac{\partial\theta(x,y,z,t)}{\partial t}\delta t+\frac{\partial\theta(x,y,z,t)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\theta(x,y,z,t)}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\theta(x,y,z,t)}{\partial z}\delta z$$
$$+O\left(\delta t^2,\delta x^2,\delta y^2,\delta z^2\right) \tag{1}$$

ここで、無限に続く Taylor 級数の残りの項をまとめて O(・・・)と表している。移動距離（$\delta x, \delta y, \delta z$）は流速を用いて（$u\delta t, v\delta t, w\delta t$）と書くことができる。これを式(1)に代入して整理すれば

$$\theta(x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t, t+\delta t)-\theta(x,y,z,t)=$$
$$\frac{\partial\theta(x,y,z,t)}{\partial t}\delta t+\frac{\partial\theta(x,y,z,t)}{\partial x}u\delta t+\frac{\partial\theta(x,y,z,t)}{\partial y}v\delta t+\frac{\partial\theta(x,y,z,t)}{\partial z}w\delta t+O\left(\delta t^2,\delta x^2,\delta y^2,\delta z^2\right) \tag{2}$$

両辺をδt で除し、さらにδt を 0 の極限をとれば O(・・・)も 0 に収束する。よって以下のような微分を得る。

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\theta(x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t, t+\delta t)-\theta(x,y,z,t)}{\delta t}=\frac{D\theta}{Dt}=\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}+w\frac{\partial\theta}{\partial z} \tag{3}$$

ここで

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z} \tag{4}$$

式(3)において紙面の都合上$\theta(x,y,z,t)$を単にθと表記している。式(3)は物理量θの実質微分（流体力学的微分、Lagrange 微分ともいう）という。流体粒子が流れとともに移動（移流という）するさいの、流体粒子に付随する物理量の変化率を示している。

式(4)は実質微分演算子である。右辺第 1 項が時間的変化率、右辺第 2～4 項が場所的（移流にともなう）変化率である。θに流速 $\mathbf{u}=(u,v,w)$を選べば流体力学における加速度となる。

$$\alpha_x=\underbrace{\frac{Du}{Dt}}_{\text{流体力学的加速度}}=\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{時間的加速度}}\underbrace{+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{場所的加速度}}$$
$$\alpha_y=\underbrace{\frac{Dv}{Dt}}_{\text{流体力学的加速度}}=\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{\text{時間的加速度}}\underbrace{+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}}_{\text{場所的加速度}}$$
$$\alpha_z=\underbrace{\frac{Dw}{Dt}}_{\text{流体力学的加速度}}=\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_{\text{時間的加速度}}\underbrace{+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{場所的加速度}}$$

5　流れの図示方法

水や空気のように一般に流体は無色透明でどのように流れているのか知覚として捉えることが容易でない（雑感：流れが簡単には目に見えないことも流体力学や水理学を難しいと感じる理由の一つであろう。講義や教科書では難しそうな数式ばかりが並び、肝心の流れが感覚として捉えられないとなれば水理学はやはり難しいであろう。しかしながら、流体現象・水理現象は身近な現象であり様々な流れの様相を我々は日常的に見かけている。数式の見た目の難しさにとらわれず、身近な流れに発見と興味感じてもらいたい。）。

流れを目に見えるようにすることを可視化（visualization）という。最も簡単な可視化は流れの中にインクなどの染料を入れて、その広がり方を目でみることである。例えば煙突からでる煙は、煙の周囲の流れを可視化している。

5-1　流線（stream line）

水面に微細なアルミニウムの粉を流し、露出時間をごく短くして写真撮影したときに得られる小線分を繋げると流れを表す線が得られる。このようにある時刻における各点での流体粒子の速度の方向と接線方向が一致する曲線を流線という。デカルト座標（通常の xyz 座標）で各瞬間における流れの方向全体を模写するのに適している。

流線上のある点(x,y,z)での流速ベクトル $\mathbf{u}=(u,v,w)$と流線のその点における接線ベクトル $d\mathbf{r}=(dx,dy,dz)$ の方向が一致するのが流線であるので、流線は次式で与えられる（流線の数学的な定義）。

$$d\mathbf{r}\,//\,\mathbf{u} \Rightarrow (dx,dy,dz)\,//\,(u,v,w) \Rightarrow \frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w} \tag{6}$$

//は平行を表す記号である。

流管(stream tube)

図-3 のような流線で囲まれた管を流管という。流線に直交する流速成分は存在しない（流体粒子は流線に沿って動いている）ため流管側面を通過する流れも当然ながら存在しない。不透過壁からなる下水道管などは流管と見なすことができる。

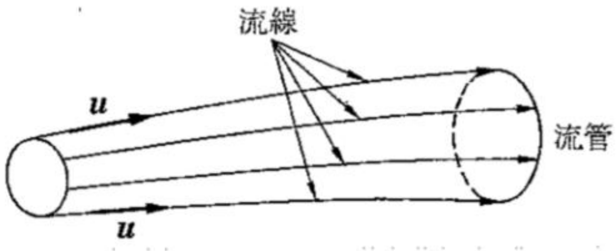


図-3　流管

5-2　流跡線（path line）

流線で例に出した説明で露出時間を長くするとある粒子の動いた軌跡が得られる。これを流跡線という。つまり、ある一個の流体粒子を追いかけその軌跡が流跡線となる。ラグランジュ的な流れの捉え方である。流体粒子が dt 時間に速度 $\mathbf{u}$ で $d\mathbf{r}$ だけ移動したとすると $d\mathbf{r}=\mathbf{u}dt$ となる。各成分に分けて記述すると

$$dt=\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w} \tag{6}$$

5-3　流脈線（streak line）

染料や煙を流体中の一点から連続的に放出し写真撮影して得られる線がある。この線は出発場所が同じで出発時刻の異なる流体粒子の位置をある時刻でつなげたものである。このような線を流脈線という。

以上、流線、流跡線、流脈線を紹介した。通常（非定常では）これらの線は全く別物であるが、定常流ではこれらの線はすべて一致する。

例題：xy 座標面において流速が以下のように表される場合の流線を求めよ。

$u=-\omega y$ 、 $v=\omega x$

ここで u は x 方向流速成分、v は y 方向流速成分である。ωは定数とする

解答：

流速を流線の式に代入すると

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x}$$

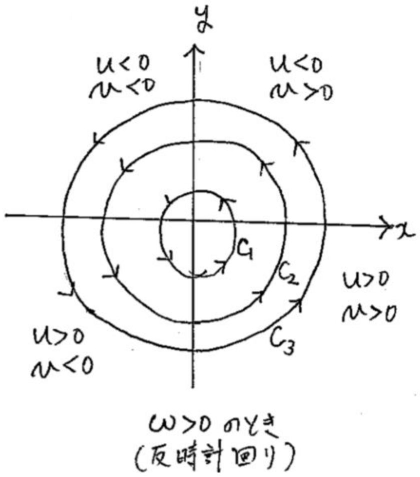
$$xdx = -ydy$$

積分すれば次式を得る。

$$\int xdx + \int ydy = 0$$

$$x^2 + y^2 = C$$

ここで C は積分定数である。円の式であることが分かる。よって流線は円であり流れは円運動である。



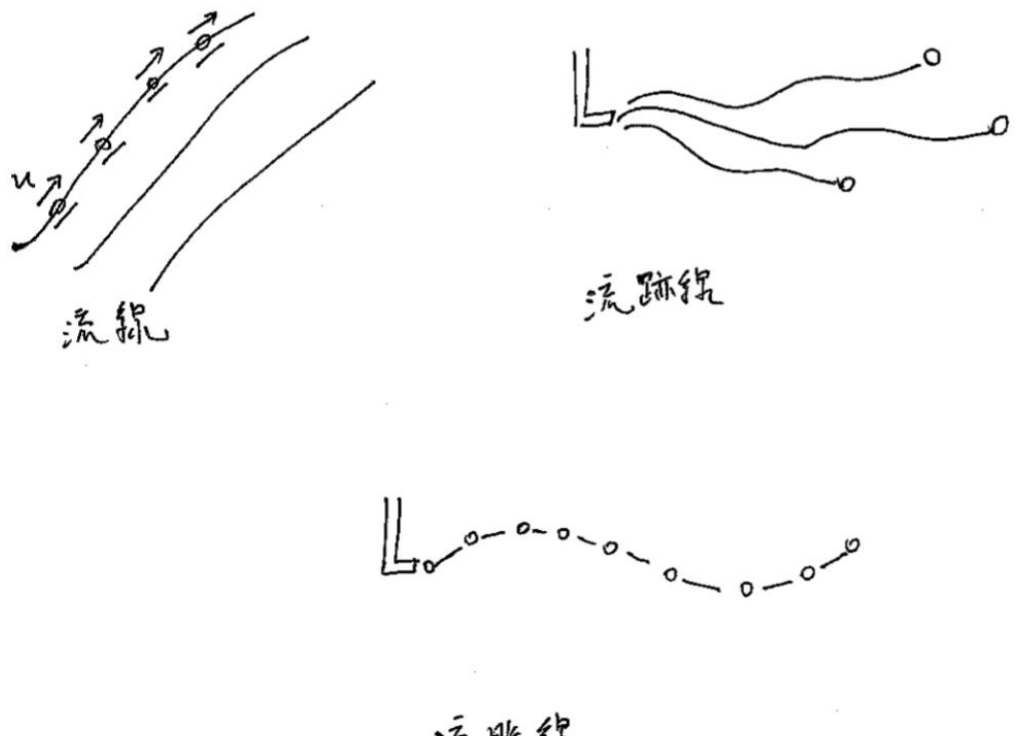


図-4　流線、流跡線、流脈線