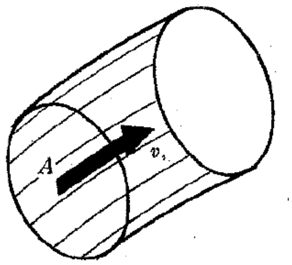
完全流体の力学(2)　連続の式とオイラーの運動方程式
Dynamics of perfect fluid #2
Continuity equation and Euler equation
教科書 pp.122-131

1.　フラックス（flux）

空間の任意点において、その点の流れ方向に垂直にとった単位面積を単位時間に通過する物理量をフラックスと定義され、次のように書くことができる。

$$\mathbf{u}\cdot\theta$$

ここで $\mathbf{u}$ は流速ベクトル（u,v,w）、θは任意の物理量である。



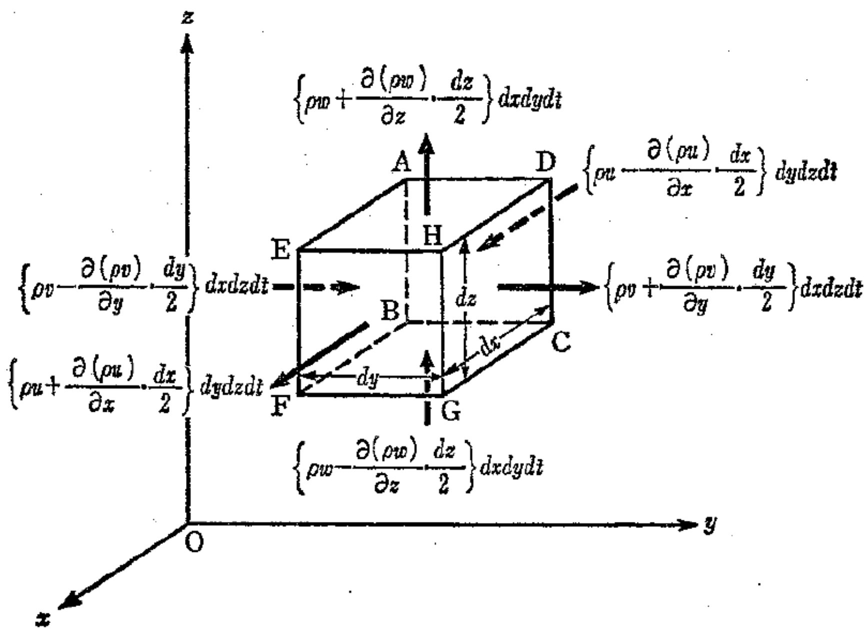
図−1　フラックス

水理学・流体力学では主に以下のフラックスが取り扱われる。

質量フラックス　　：　$\rho\mathbf{u}=\rho(u,v,w)=(\rho u,\rho v,\rho w)$

運動量フラックス　：$\rho\mathbf{uu}=\rho\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}(u,v,w)=\begin{pmatrix}\rho u\\\rho v\\\rho w\end{pmatrix}(u,v,w)=\begin{pmatrix}\rho uu&\rho uv&\rho uw\\\rho vu&\rho vv&\rho vw\\\rho wu&\rho wv&\rho ww\end{pmatrix}$

質量フラックスはスカラーとベクトルの積でベクトルになる。
運動量フラックスは縦ベクトルと横ベクトルの積でテンソル（3×3 のマトリックス）になる。



図−2　微小直方体への流体の流出入

2. 連続の式（continuity equation）

流体中に図-2 に示すような各辺の長さが dx、dy、dz の微小直方体を考える（コントロールボリュームと呼ばれる）。質量保存則に従えば dt 時間内にこの微小直方体に流入する流体の質量とそこから流出する質量の差は dt 時間内の微小直方体内の流体の質量の増加量に等しい。

（dt 時間内の微小直方体の質量の増加量）＝
（dt 時間内の微小直方体に流入する質量）—（dt 時間内の微小直方体から流出する質量）
＝（dt 時間内に微小直方体に運びこまれる正味の質量）

微小直方体の中心座標（x、y、z）の流速を（u、v、w）とする。図-2 に示す x 軸に直交する面 ABCD を通過して dt 時間内に微小直方体に流入する質量は Taylor 展開を用いて以下のよう与えられる。

$$\rho udydzdt - \frac{\partial\left(\rho udydzdt\right)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2} = \left(\rho u - \frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right)dydzdt \tag{1}$$

同様にして x 軸に直交するもう一方の面 EFGH を通過して dt 時間内に微小直方体から流出する質量は

$$\rho udydzdt + \frac{\partial\left(\rho udydzdt\right)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2} = \left(\rho u + \frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right)dydzdt \tag{2}$$

したがって dt 時間に x 軸に直交する面を通して微小直方体に運び込まれる正味の質量は

$$\text{式(1)—式(2)} = -\frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial x}dxdydzdt \tag{3}$$

同様にして y 軸、z 軸に直交する面を通して dt 時間に微小直方体に運び込まれる正味の質量は

$$-\frac{\partial\left(\rho v\right)}{\partial y}dxdydzdt \tag{4}$$

$$-\frac{\partial\left(\rho w\right)}{\partial z}dxdydzdt \tag{5}$$

したがって dt 時間に微小直方体に運び込まれる正味の質量は、三方向の和であるので

$$\text{式(3)+式(4)+式(5)} = -\left(\frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho v\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\rho w\right)}{\partial z}\right)dxdydzdt \tag{6}$$

一方、dt 時間後の微小直方体の流体の質量は Taylor 展開を用いて以下のよう与えられる。

$$\text{（}dt\text{ 時間後の微小直方体の流体の質量）} = \rho dxdydz + \frac{\partial\left(\rho dxdydz\right)}{\partial t}dt \tag{7}$$

dt 時間後の微小直方体の流体の質量増分量は式(7)の右辺第二項である。これと式(6)が等しいことより、

$$\frac{\partial\left(\rho dxdydz\right)}{\partial t}dt = \frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydzdt = -\left(\frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho v\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\rho w\right)}{\partial z}\right)dxdydzdt$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}=0 \tag{8}$$

が得られる。式(8)がオイラー（Euler）の連続方程式である。物理的な意味は質量保存則である。式(8)を以下のように展開する。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial y}+\rho\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

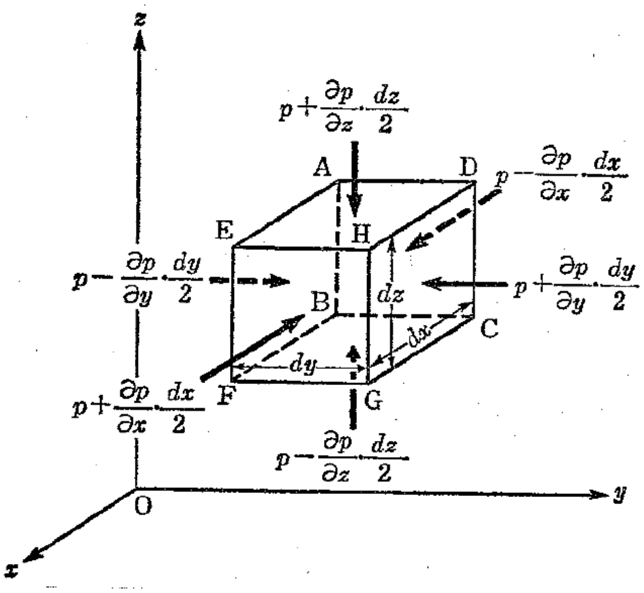
$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \tag{9}$$

Dρ/Dt=0 の条件を導入すると式(9)は以下のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{10}$$

式(10)が 3 次元非圧縮性流体の連続の式（continuity equation）である。Dρ/Dt=0 を満足する流体が非圧縮性流体である。



図–3　微小直方体に作用する圧力

3. Euler の式（Euler equation）

前章と同じように各辺の長さが dx、dy、dz の微小直方体を考える。微小直方体には外力として、力の大きさが面積に比例する面積力（圧力やせん断応力）と質量（密度一定の場合は体積）に比例する質量力（重力や慣性力）が働く。完全流体ではせん断力は現れないので（逆にせん断力が現れない流体を完全流体と定義される）面積力として圧力だけを考える（**図–3** 参照）。

中心座標を（x、y、z）とし、その点の圧力を $p(x,y,z,t)$とすると ABCD 面、EFGH 面；AEFB 面、DHGC 面；BFGC 面、AEHD 面に働く圧力はそれぞれ（各面の圧力は中心位置から dx/2、dy/2、dz/2 だけ離れていることを考慮して）

$$p(x,y,z,t)-\frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial x}\frac{dx}{2}、\quad p(x,y,z,t)+\frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

$$p(x,y,z,t)-\frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial y}\frac{dy}{2}、\quad p(x,y,z,t)+\frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

$$p(x,y,z,t)-\frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial z}\frac{dz}{2}、\quad p(x,y,z,t)+\frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial z}\frac{dz}{2}$$

となる。微小直方体内の流体に単位質量あたりに作用する質量力の x、y、z 方向成分を X、Y、Z とする。

微小直方体内の流体に作用する外力の x 方向成分 F_x は

$$F_x = \rho dxdydz \cdot X + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} \right) dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} \right) dydz = \rho dxdydz \cdot X - \frac{\partial p}{\partial x} dxdydz \tag{11}$$

ここで $p(x,y,z,t)$を p と表示している。同様に外力の y 方向成分 F_y、z 方向成分 F_z は

$$F_y = \rho dxdydz \cdot Y - \frac{\partial p}{\partial y} dxdydz \tag{12}$$

$$F_z = \rho dxdydz \cdot Z - \frac{\partial p}{\partial z} dxdydz \tag{13}$$

x 方向の流体の加速度は Du/Dt であるので、微小直方体に Newton の運動の第二法則を適用すると以下のような x 方向の運動方程式が得られる。

$$\rho dxdydz \frac{Du}{Dt} = F_x = \rho dxdydz \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho dxdydz \cdot X - \frac{\partial p}{\partial x} dxdydz$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{14}$$

同様にの y 方向、z 方向の運動方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{15}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{16}$$

となる。式(14)～(16)をオイラーの運動方程式あるいはオイラーの式（Euler equation）と呼ばれ、完全流体の運動方程式である。

ところでオイラーの式で u=v=w=0 とおけば

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z$$

これは別の回で学習する相対的静止流体の釣り合いの式（オイラーの釣り合い式）である。さらに x、y を水平方向座標とし、z 鉛直座標（鉛直下向きを正とする）とすれば、水平方向の質量力は 0（重力加速度の水平方向成分は 0）であり鉛直方向の重力加速度を g とすれば（X=Y=0、Z=g）

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = g$$

となる。これは水理学 I で学習した静水圧の式である。上式を不定積分すれば

水平方向において p=const.

鉛直方向において p=ρgz+C

を得る。