

相対的静止
Relative equilibrium
 教科書 pp.122-131

1. 慣性力 (inertia force)

ある系が等加速度運動をしているとき (加速度 0 の等速運動を含む)、その系と同じ運動をしている座標系から観測すると慣性力が他の力と釣り合って流体は静止しているように見える。これを相対的静止という。

一定加速度 α で動き出した電車の中のつり革を考えてみよう。次第に速くなる電車のつり革は鉛直に対して傾く。外にいる観測者はつり革には外力として張力 (tension) T と重力 $W=mg$ がかかり、その合力 F がつり革に電車と同じ加速度 α を与えている。一方、電車の中にいる観測者は電車と同じ加速度で動いているためつり革への加速度を認めることができない。張力と重力の合力に釣り合う見かけの力 F' が働いてつり革が静止しているように見える。この見かけの力 F' が慣性力である。等加速度運動をしている系ではこのような見かけの力を導入することで静止力学的な釣り合い現象として解析が行える。

2. 相対的静止流体の釣り合い式

3次元オイラーの式は以下で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3)$$

ここで u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の流速、 X, Y, Z はそれぞれ x, y, z 方向の質量力 (次元は加速度)、 p は圧力、 ρ は流体の密度である。オイラーの式で $u=v=w=0$ とおけば

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho X \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho Y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho Z \end{aligned} \quad (4)$$

となる。 $X=Y=0, Z=g$ とすれば通常の静水圧の基礎式になる。

圧力 $p(x, y, z)$ を全微分 (多変数関数の Taylor 展開) すると

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (5)$$

式(4)より式(5)は以下のようなになる。

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) \quad (6)$$

式(6)をオイラーの釣り合い式という。式(6)はある場所 (x, y, z) から少しだけ離れた場所 $(x+dx, y+dy, z+dz)$ の圧力の差を示している。 $dp=0$ は二点間の圧力の差が 0 であること、つまり同じ値であることを意味する。 $dp=0$ の面を等圧面 (equi-potential surface) という。水表面は $p=0$ の等圧面である。

例題 1 (教科書 p.149 例題 6)

加速度と反対方向に慣性力が作用する。オイラーの釣り合いの式は

$$dp = \rho(F_x dx + F_z dz)$$

である。ここで F_x 、 F_z はそれぞれ x 、 z 方向の慣性力で以下のようになる (符号は座標の取り方に依存する。要注意!!)。

$$F_x = \alpha \cos \theta$$

$$F_z = -g - \alpha \sin \theta$$

よってオイラーの釣り合いの式は

$$dp = \rho \alpha \cos \theta dx - \rho(g + \alpha \sin \theta) dz$$

上式を積分すると

$$\int dp = \int \rho \alpha \cos \theta dx - \int \rho(g + \alpha \sin \theta) dz$$

$$\int dp = \rho \alpha \cos \theta \int dx - \rho(-g + \alpha \sin \theta) \int dz$$

$$p = \rho \alpha \cos \theta \cdot x - \rho(g + \alpha \sin \theta)z + C \tag{7}$$

C は積分定数である。 $z=z_*$ を水面の位置とすれば (z_* は水槽が加速度運動していないとした場合の水面から測った水位である)、水面の圧力は 0 (ゲージ圧) であるので

$$C = -\rho \alpha \cos \theta \cdot x + \rho(g + \alpha \sin \theta)z_* \tag{8}$$

原点を $x=0$ 、 $z_*=0$ にとれば水面の形状が次式で与えられる。

$$z_* = \frac{\alpha \cos \theta}{g + \alpha \sin \theta} x$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\alpha \cos \theta}{g + \alpha \sin \theta}$$

式(7)、式(8)から C を消去すると圧力を表す式が得られる。

$$p = \rho \alpha \cos \theta \cdot x - \rho(g + \alpha \sin \theta)z - \rho \alpha \cos \theta \cdot x + \rho(g + \alpha \sin \theta)z_*$$

$$= \rho(g + \alpha \sin \theta)(z_* - z) = \rho g \left(1 + \frac{\alpha \sin \theta}{g} \right) (z_* - z) \tag{10}$$

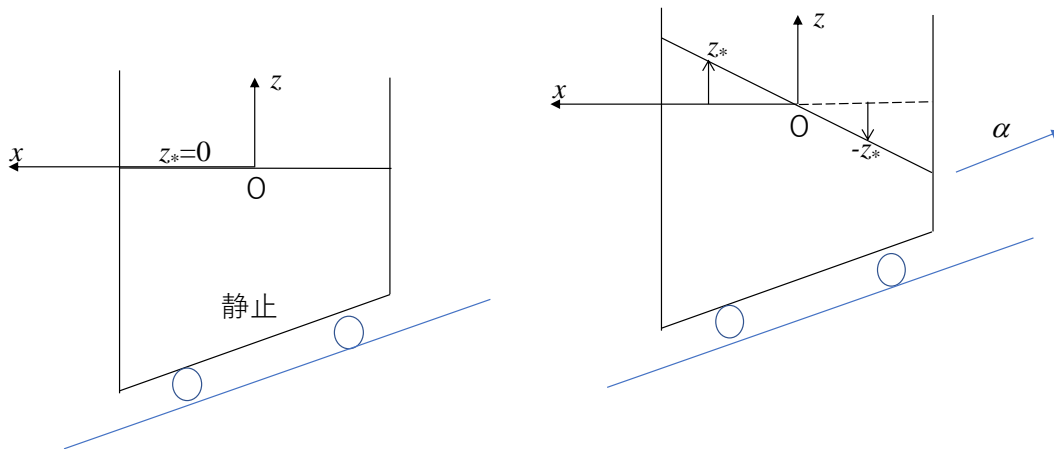


図-1 斜面を加速度 α で移動する水槽内の水面

例題 2 (教科書 p.150 例題 7)

回転水槽には遠心力が r 軸方向 (半径方向) に作用する。オイラーの釣り合いの式は

$$dp = \rho(F_r dr + F_z dz)$$

である。ここで F_x 、 F_z はそれぞれ r 、 z 方向の慣性力で以下のようになる。

$$F_r = r\omega^2$$

$$F_z = -g$$

これをオイラーの釣り合い式に代入して積分すると

$$dp = \rho r\omega^2 dr - \rho g dz$$

$$\int dp = \int \rho r\omega^2 dr - \int \rho g dz$$

$$\int dp = \rho\omega^2 \int r dx - \rho g \int dz$$

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 - \rho g z + C \quad (11)$$

C は積分定数である。回転水槽底面、回転軸を原点とし $z=z_1$ を水面の位置とすれば、水面では $p=0$ より次式が得られる。

$$z_1 = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C_* \quad (12)$$

$C_* = C/\rho g$ でこれも積分定数である。

教科書の図より、回転水槽の中心 ($r=0$) では水深が h_0 であるので $C_* = h_0$ となる。

$$z_1 = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_0 \quad (13)$$

例題 3

図-2 に示す一定曲率の河川湾曲部において内岸の半径 $r_1=200\text{m}$ 、外岸の半径 $r_2=250\text{m}$ である。内岸と外岸の差が 0.5m のとき河川内流速 v はいくらか。

鉛直上向きに z 座標を曲率半径方向に r 座標をとる。曲率半径方向の遠心力と鉛直下向きに重力が働く。オイラーの釣り合いの式は例題 2 と同様に

$$dp = \rho r\omega^2 dr - \rho g dz$$

となる。 ω は角速度であるが問題には与えられていないので、河川内流速 v を用いれば以下のようになる。

$$dp = \rho \frac{v^2}{r} dr - \rho g dz$$

上式を積分すると

$$\int dp = \int \rho \frac{v^2}{r} dr - \int \rho g dz$$

$$\int dp = \rho v^2 \int \frac{1}{r} dx - \rho g \int dz$$

$$p = \rho v^2 \ln r - \rho g z + C \quad (14)$$

境界条件として $r=r_1$ で $z=0$ とすると $C = -\rho v^2 \ln r_1$ が得られるので式(13)は

$$z = \frac{v^2}{g} \ln \frac{r}{r_1} \quad (15)$$

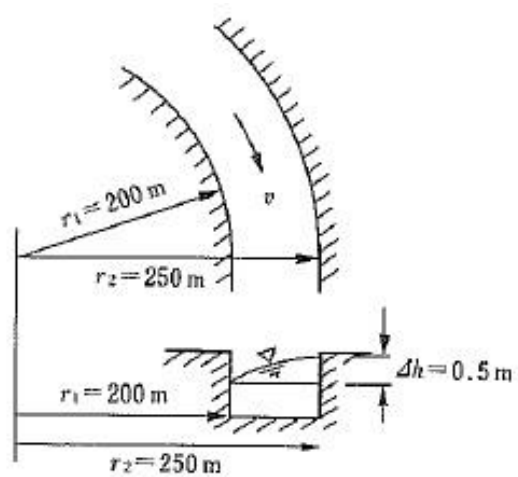


図-2 河川蛇行部の水面形

問題は河川内流速を求めるものなので

$$v = \sqrt{\frac{zg}{\ln \frac{r}{r_1}}} \quad (16)$$

これに与えられた数値を代入する ($z=\Delta h$ である) と

$$v = \sqrt{\frac{0.500 \times 9.80}{\ln \frac{250}{200}}} = 4.69(m/s)$$

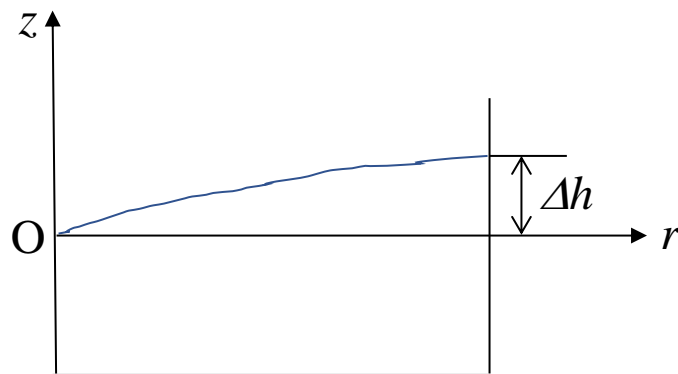


図-2 の補足