完全流体の力学(3)　ベルヌイ（Bernoulli）の定理

Dynamics of perfect fluid #3
Bernoulli's theorem
教科書 pp.151-156

1.　エネルギー保存の法則（Conservation law of energy）

質点力学における基礎原理の一つがエネルギー保存の法則である。これは質点の質量を m、速度を v、基準面からの高さを z とすれば

$$\frac{mv^2}{2} + mgz = E = const. \tag{1}$$

と表される。E は質点が持つエネルギーである。同じ質点に着目すれば質点のエネルギーは常に一定であることを示している。上式は暗黙の前提として摩擦などによるエネルギーの損失は無いものとしている。完全流体の運動にもエネルギー保存則は適用できる。

流体は特定の形を持たないので単位体積当たりエネルギーで考える。つまり質量 m の代わりに密度ρを用いる。また流体には圧力が作用するので式(1)とは異なり、圧力による仕事が新たに加わる。質点力学の類似から次式が考えられる。

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gz + p = E = const. \tag{2}$$

水理学では単位重量ρg 当たりのエネルギーとして表すので

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = E = const. \tag{3}$$

式(3)の左辺第一項は速度水頭（velocity head）、第二項は高度水頭（elevation head）、第三項は圧力水頭（pressure head）である。E は各項の和で全水頭（total head）と呼ばれる。すでに水理学 I で学習しているが、エネルギーが流線上で一定であることを意味する。これをベルヌーイの定理（Bernoulli's theorem）と呼ぶ（ベルヌーイの式と呼ぶこともある）。次にオイラーの式からベルヌーイの定理を誘導する。

2.　ベルヌーイの定理（Bernoulli' s theorem）

図-1 にある流線 S に沿った流管に働く外力を示す。この流管の運動方程式（オイラーの式）は以下のようになる。ここでは定常流れを対象とする。したがって流線 S は変動せず、空間内で固定された座標となる。

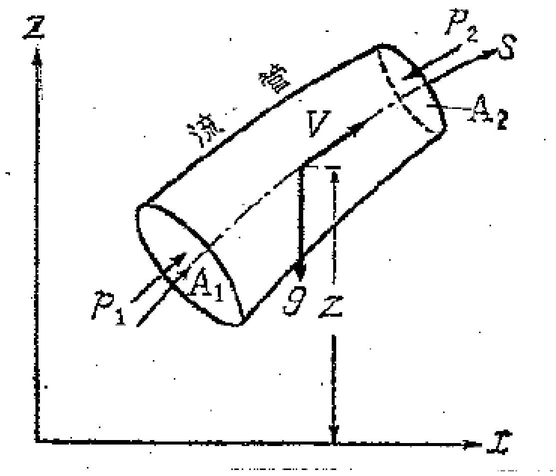

図-1　流線に沿った流管

$$V\frac{\partial V}{\partial s}=S-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \tag{4}$$

ここで、S は s 方向の質量力である。密度ρは圧力 p の一義的な関数であるとする。次式で定義される圧力関数 P も圧力 p の関数である。

$$P=\int\frac{1}{\rho}dp \tag{5}$$

圧力関数 P を s で微分すると

$$\frac{\partial P}{\partial s}=\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \tag{6}$$

となり、圧力関数の微分は式(4)の右辺第二項（圧力勾配項 pressure gradient term）になることが分かる。また S は重力の s 軸方向成分であるので重力ポテンシャルΩを持ち、以下のように表される。

$$S=-\frac{\partial \Omega}{\partial s} \tag{7}$$

P、Ωを用いて式(4)を整理すると

$$V\frac{\partial V}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2}\right)=S-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}=-\frac{\partial \Omega}{\partial s}-\frac{\partial P}{\partial s} \tag{8}$$

よって以下のような式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2}+\Omega+P\right)=0 \tag{9}$$

式(9)の左辺の括弧の中は流体のエネルギーである。s 軸に沿ってその変化が 0 であることを意味する。式(9)を s で積分すれば

$$\frac{V^2}{2}+\Omega+P=C \tag{10}$$

を得る。C は積分定数で流線によって異なる値を取る。$P=p/\rho$、$\Omega=gz$ として式(10)に代入すれば

$$\frac{V^2}{2g}+z+\frac{p}{\rho g}=C=E \tag{11}$$

となり、式(3)を得る。ここで z は基準面から鉛直方向に測った流線の高さである。1 章で述べたように流線に沿ってエネルギーが一定に保たれていることを示している。

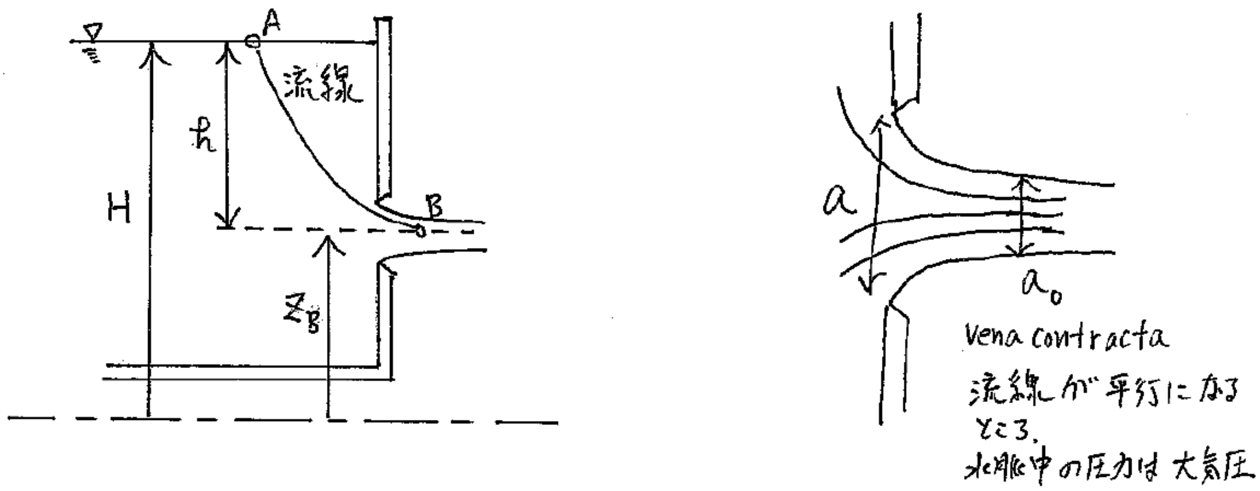

図-2　オリフィスからの流出

3.　ベルヌーイの定理の応用例

3-1 オリフィス（orifice）

水槽の底あるいは側壁に面積 a の小さな穴をあけて水を放流するものをオリフィス（orifice）という。ベルヌーイの定理を用いてオリフィスから流出流速を求めよう。**図-2** に示すように基準面から水面までの高さを H、オリフィス中心部までの高さを Z_B する。水面上の A 点とオリフィスからの流出水脈のくびれ箇所（ベナコントラクタ：vena contracta）B 点の間でベルヌーイの定理を適用すると

$$\frac{v_A^2}{2g}+H+\frac{p_A}{\rho g}=\frac{v_B^2}{2g}+z_B+\frac{p_B}{\rho g} \tag{12}$$

が成立する。v_A、p_A は A 点での流速、圧力であり、v_B、p_B は B 点での流速、圧力である。水槽は非常に大きく水面の高さ Z_B は時間的に変わらないものとする。この条件では水面での流速 v_A は 0 と見なすことができる。また水面の圧力は大気圧であるのでゲージ圧では $p_A=0$ である。詳しい説明は割愛するがベンコントラクタでは水脈中の圧力は大気圧となっている。よって $p_B=0$ である。以上を整理すると式(12)は

$$H=\frac{v_B^2}{2g}+z_B$$

$$\frac{v_B^2}{2g}=H-z_B=h$$

$$v_B=\sqrt{2gh} \tag{13}$$

ここで h はオリフィスまでの水深である。流出流速は式(13)で与えられる。これをトリチェリ（Torricelli）の定理という。

さて、オリフィスの断面積を a、ベンコントラクタにける断面積を a_0（$a>a_0$）とすれば流量は

$$Q=a_0\sqrt{2gh}$$

となる。ここで収縮係数 C_C を $C_C=a_0/a$ と定義すると

$$Q=C_C a\sqrt{2gh}$$

となる。さらに実際には出口でエネルギー損失をともなうので（出口損失）その補正係数として Cv を導入すれば

$$Q=C_v C_C a\sqrt{2gh}=Ca\sqrt{2gh} \tag{14}$$

となる。C を流量係数という。0.6～0.7 程度の値を取る。

3-2 ピトー管（Pitot tube）

流速を計測する装置にピトー管（Pitot tube）がある。これは図-3 に示すような先端が開いている管（総圧管：total pressure tube）と先端が閉じて側面に小穴が空いている管（静圧管：static pressure tube）の二本の管からできている。両者の管は同じ高さで流れに向けて設置される。総圧管の中の水は静止しているため先端部は水の壁のような状態と見なすことができる。そこはよどみ点（stagnation point）と呼ばれ、流速は 0 となっている。**図-3** に示すようにピトー管から少しだけ上流側の点 A 点とピトー管前面の B 点でベルヌーイの定理を適用すると

$$\frac{u^2}{2g}+\frac{p_A}{\rho g}=\frac{p_B}{\rho g} \tag{12}$$

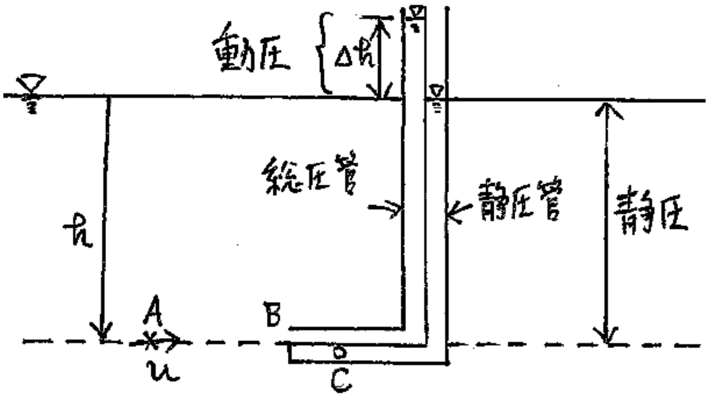

図-3　ピトー管

圧力 p_B は圧力 p_A よりも $\rho u^2/2$ だけ大きいことが分かる。ここで圧力 p_A は静圧（static pressure）、$\rho u^2/2$ を動圧（dynamic pressure）、両者の和 p_B を総圧（total pressure）という。総圧管は文字通り総圧を計測する管である。

さて、静圧官の中にも水が静止しているが流れが直接当たっていないので静圧官は C 点の圧力 p_C だけを取り出している。ここで圧力は静水圧に従うとすれば（一般に河川流では鉛直方向加速度が小さいためこのように考えても差し支えがない）$p_A=p_C=\rho gh$ である。つまり静圧管は水面までの高さを計測していることになる。総圧管と静圧管の差を Δh とすると

$$\frac{u^2}{2g}=\frac{p_B}{\rho g}-\frac{p_A}{\rho g}=\frac{p_B}{\rho g}-\frac{p_C}{\rho g}=\Delta h$$

$$u=\sqrt{2g\Delta h} \tag{13}$$

となる。総圧管と静圧管の水頭差から流速を計測できる。

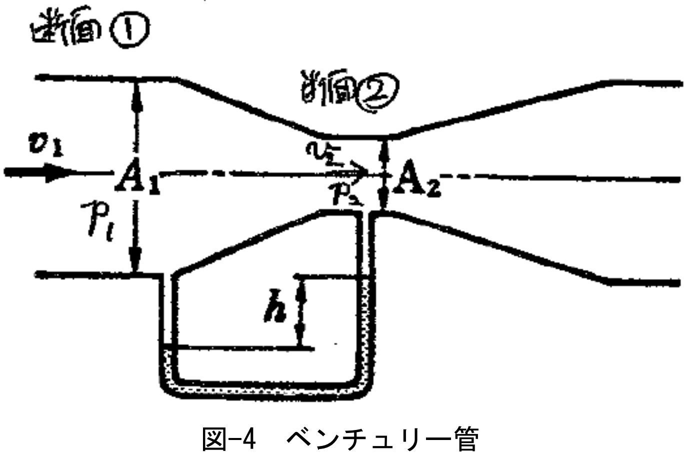

図-4　ベンチュリー管

3-3 ベンチュリー管（Venturi tube）

管路内の流量を計測する装置にベンチュリー管がある。管内の断面積を絞ると連続の式（定常流では $Q=vA=$const.となる。ここで v は断面平均流速、A は断面積）により流速が増加し、ベルヌーイの定理により圧力が減少する。このことを利用して管内の流量を計測することができる。

図-4 にベンチュリー管を示す。管の断面積 A_1、収縮部分の断面積を A_2 とする。また収縮前の断面平均流速を v_1、収縮断面での断面平均流速を v_2 とする。管内の流体の密度を ρ、マノメーターの流体の密度を ρ_1 とする。断面①と断面②にベルヌーイの定理を適用する。それぞれの断面での圧力を p_1、p_2 とす

れば

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2 \tag{14}$$

が成立する。z_1、z_2 は各断面の高さであるが、今管は水平に設置されている。よって $z_1=z_2$ である。また連続の式より

$$Q=A_1v_1=C_CA_2v_2 \tag{15}$$

となる。C_C は縮流係数である。式(14)、(15)から v_1、v_2 を消去すると次式を得る。

$$\frac{Q^2}{2gA_1^2}+\frac{p_1}{\rho g}=\frac{Q^2}{2gC_C^2A_2^2}+\frac{p_2}{\rho g}$$

$$Q^2\frac{A_1^2-C_C^2A_2^2}{C_C^2A_1^2A_2^2}=2g\frac{p_1-p_2}{\rho g}$$

$$Q=\frac{C_CA_2}{\sqrt{1-\left(\frac{C_CA_2}{A_1}\right)^2}}\sqrt{2g\frac{\left(p_1-p_2\right)}{\rho g}} \tag{16}$$

またマノメーターでは次の関係が成立する。

$$p_1+\rho gh=p_2+\rho_1gh$$

$$p_1-p_2=\left(\rho_1-\rho\right)gh$$

よって

$$\frac{p_1-p_2}{\rho g}=\frac{\left(\rho_1-\rho\right)gh}{\rho g}=\frac{\left(\rho_1-\rho\right)h}{\rho}$$

したがって

$$Q=\frac{C_CA_2}{\sqrt{1-\left(\frac{C_CA_2}{A_1}\right)^2}}\sqrt{2g\frac{\rho_1-\rho}{\rho}h} \tag{17}$$