完全流体の力学(4)　ベルヌイ（Bernoulli）の定理

Dynamics of perfect fluid #4
Bernoulli's theorem

教科書 pp.151-156

1.　運動方程式の変形

オイラーの運動方程式を以下のように変形していく．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial x}(\Omega+P)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}-w\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}(\Omega+P)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right)+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}v^2\right)-v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}w^2\right)-w\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}(\Omega+P)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}w^2\right)+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-v\frac{\partial v}{\partial x}-w\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}(\Omega+P)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+w\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}(\Omega+P)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)+w\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)-v\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{1}$$

ここでΩは重力ポテンシャルで x 方向の重力加速度は $g_x=-\partial\Omega/\partial x$ となる．P は圧力関数（$P=\int\rho^{-1}dp$）である．また $q^2=u^2+v^2+w^2$ であり $q^2/2$ は単位質量当たりの流体の運動エネルギーである．y，z 方向も同様にして

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-w\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)+v\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)-u\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0 \tag{3}$$

ここで各式の右辺第 3，4 項を以下の記号を用いて表すことにする．

$$\omega_x=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\omega_y=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

ω_x，ω_y，ω_z はそれぞれ x，y，z 方向を軸とした流体粒子の回転を表すもので渦度（vorticity）と呼ばれる．ベクトル解析学的に表せば

$$\boldsymbol{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)=\nabla\times\mathbf{u}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(u,v,w)=\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$$

となる．∇はナブラ（nabla）と読む．勾配を表す微分演算子である．×は外積を表す記号である．式(1)～(3)は以下のようになる．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)+w\omega_y-v\omega_z=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)+u\omega_z-w\omega_x=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)+v\omega_x-u\omega_y=0$$

これら三つの式をベクトルを用いて表記すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\\dfrac{\partial}{\partial y}\\\dfrac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\left(\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)-\begin{pmatrix}v\omega_z-w\omega_y\\w\omega_x-u\omega_z\\u\omega_y-v\omega_x\end{pmatrix}=0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)-\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}=0 \tag{4}$$

となる．式(4)において定常流（$\partial\mathbf{u}/\partial t=0$）として，流線に沿って積分する．ここで次のことを注意しよう．ベクトル $\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}$ は流線に直交する．したがって $\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}$ の流線方向成分は 0 であるため式(4)を流線方向では $\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}=0$ とおける．

$$\nabla\left(\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)=0 \tag{5}$$

式(4)において定常という条件から左辺第一項が 0 となる，とさら流線に沿うという条件から左辺第三項が 0 となる．上式を積分すると

$$\frac{q^2}{2}+\Omega+P=const. \tag{6}$$

を得る．これは通常のベルヌーイの定理である．

2.　無渦運動（irrotational motion）のエネルギー方程式

渦度が存在しない（$\boldsymbol{\omega}=0$）流れを無渦運動（irrotational motion）という（非回転運動，非回転流れ，渦なしの流れとも呼ばれる）．無渦運動では速度ポテンシャルΦが存在する．速度ポテンシャルΦを用いると流速は次のように表される．

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,,\qquad v=\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,,\qquad w=\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

これらを渦度の定義式に代入すれば渦度が 0 になることが確かめられる．

$$\omega_x=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}=0$$

（微分の順番は交換できることに注意.）
式(1)に速度ポテンシャルを代入すれば次式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)=0 \tag{7}$$

同様にして式(2)～(3)は以下のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)=0 \tag{9}$$

ベクトル解析学的に表記すると

$$\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+\Omega+P\right)=0 \tag{10}$$

となる．式(5)との標記的違いは括弧のなかに時間微分項を含んでいることである．これは定常という条件に縛られないことを意味する．式(10)を積分すると

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+\Omega+P=F(t) \tag{11}$$

を得る．式(11)を拡張された（一般化された）ベルヌーイの定理（式）と呼ぶ．式(11)の右辺第一項は積分定数である．これは空間座標 x，y，z に関して定数（空間座標の関数でない）であるが時間に関してはない定数ではない（式(11)は非定常関数であるので積分定数も時間の関数である）. 定常状態であれば式(11)は以下のようになる．

$$\frac{q^2}{2}+\Omega+P=const. \tag{12}$$

上式は式(9)と見かけ上同一であるが成立条件が異なる．ベルヌーイの定理と拡張されたベルヌーイの定理の違いを表-1 にまとめる．

表-1　ベルヌーイの定理と拡張されたベルヌーイの定理の成立条件

ベルヌーイの定理（式(6)）	拡張されたベルヌーイの定理（式(11)）
完全流体	完全流体
定常	定常および非定常
渦（渦度）有でも良い	渦（渦度）無し
流線上で同一エネルギー	流れの場全体で同一エネルギー

3. ポテンシャル流れ（potential flow）

渦無し流れは速度ポテンシャルを持つことはすでに述べた．速度ポテンシャルが存在する流れをポンテンシャル流れという，2 次元，非圧縮性，完全流体，渦無し流れの条件がそろった流れ場は速度ポテンシャルの他に流れ関数が存在する．このような場合では複素関数論を用いて流れを表すことができる．

3-1 ラプラスの式（Laplace equation）

速度ポテンシャルを非圧縮性流体の連続の式に代入すると次式を得る．

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)=0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0 \qquad (13)$$

式(13)はラプラスの式と呼ばれる．渦無し流れではオイラーの式の代わりにラプラスの式を解いて速度ポテンシャルを求め，それから流速を求めれば良い．では圧力はどのようにして求めるのであろうか？圧力は式(11)から求められる．したがって拡張されたベルヌーイの式は圧力方程式とも呼ばれる．波を解析する際に用いられる．

3-2　2 次元渦無し流れ場

2 次元非圧縮性完全流体で渦無し流れ（2 次元ポテンシャル流れ）では 2 次元連続方程式を満足する流れ関数Ψ（stream function）が定義できる．

$$u=\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v=-\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

これらを連続の式に代入すると

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)=\frac{\partial \Psi}{\partial x \partial y}-\frac{\partial \Psi}{\partial y \partial x}=0$$

となり連続式を自動的に満足することが分かる．
また渦度の式に代入すると（2 次元なのでω_zしか存在しない），渦なし流れであることを考慮して

$$\omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=0 \qquad (14)$$

となり，2 次元ラプラスの式が得られる．渦無し流れではポテンシャルΦも存在するので流速は

$$u=\frac{\partial \Psi}{\partial y}=\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad v=-\frac{\partial \Psi}{\partial x}=\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

となる．これは複素関数論におけるコーシー・リーマン（Cauchy-Riemann）の関係式と呼ばれΦを実数部，Ψを虚数部とすると複素関数 W

$$W=\Phi+i\Psi$$

が解析関数であるための条件である．W は複素ポテンシャルと呼ばれる．複素関数論を用いれば流線と等ポテンシャル線が直交することが示される．複素ポテンシャルの最も簡単な例として

$$W(z)=Uz=Ux+iUy$$

を考える．速度ポテンシャルは$\Phi=Ux$ であり，流れ関数（流線）は$\Psi=Uy$ となる．どちらを用いても u, v は

$$u=\frac{\partial Uy}{\partial y}=\frac{\partial Ux}{\partial x}=U, \qquad v=-\frac{\partial Uy}{\partial x}=\frac{\partial Ux}{\partial y}=0$$

が得られ，x 軸に平行な一様流を表す.