完全流体の力学(5)　運動量の定理とその適用
Dynamics of perfect fluid #5
Momentum theorem and its application

教科書 pp.28-29

1.　運動量保存の法則

1-1 ニュートンの第二法則

ニュートンの第二法則を用いて完全流体の運動方程式（オイラーの式）は導かれる．ここでニュートンの第二法則を復習しよう．

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1}$$

$$= m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{2}$$

ここで **F** は力，**a** は加速度，**v** は速度，*m* は質量，**p**（=m**v**）は運動量である（質量以外はベクトル標記をしている.）．式(1)は力の定義であり，質量と加速度の積で力は定義される．ある物体に働く力の合力は，その物体の質量と合力と同方向の加速度向の積に等しいことから，力の釣り合い式（運動方程式）をたてることができる．

次に式(2)を見てみよう．これは力が運動量の時間変化率に等しいことを示している．もともとニュートンの第二法則は式(2)を述べたものであり，次のように記述される．

「物体の運動量の時間的変化は，その物体に働く力に等しい.」

さて，式(2)を t_0 から $t_0+\Delta t$ まで積分すると次式を得る．

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{d\mathbf{p}}{dt}dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t}d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t_0+\Delta t) - \mathbf{p}(t_0) = \Delta\mathbf{p} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\mathbf{F}dt = \mathbf{F}\Delta t \tag{3}$$

式(3)の最後では，**F** は微小な時間Δt では一定と仮定している．**F** の時間積分は t_0 から $t_0+\Delta t$ までの間に働いた力の力積と呼ばれる．式(3)は次のことを意味している．

「運動量の時間的変化量は，その間に働く力の力積に等しい.」

1-2 運動量保存則（Conservation law of momentum ）

前節で述べたニュートンの第二法則は質点力学に対するもので，同一の質点に着目して成立するものである．流体力学や水理学ではオイラー的視点で考えるので注意すべき点が生じる（ラグランジュ的な立場をとれば流体力学も質点力学と同様である.）．オイラー的立場では流体中に仮想的な体積（コントロールボリューム）を考える．コントロールボリュームは考えている場所に固定されているため，質点のように移動することはできない．しかしながらコントロールボリュームの周囲は動いている流体（すなわち流れ）であるので，流れによって運動量がコントロールボリュームに運ばれてくる（あるいは流出する）ことを考慮しなければならない．

流体力学における運動流保存則は以下のようになる（図-1 参照）．

（コントロールボリュームが持つ運動量の時間的変化量）＝
（コントロールボリュームに単位時間当たりに流入する運動量の量）―
（コントロールボリュームに単位時間当たりに流出する運動量の量）
+（コントロールボリュームに作用する力積（表面力（圧力），質量力））

完全流体では表面力は圧力だけであるが粘性流体では圧力の他にせん断応力が加わる．

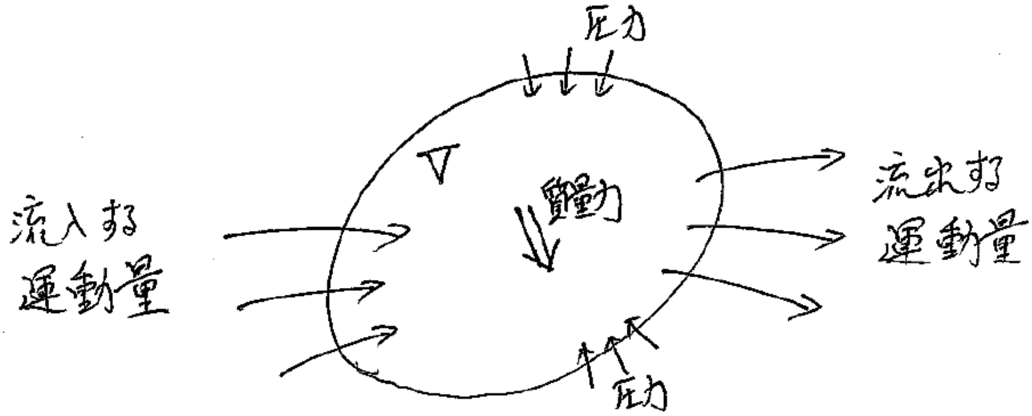


図-1　運動量の保存

運動量の保存則をまとめると以下のようになる．
質点力学における運動量保存則：**運動量の時間的変化率＝力積**
流体力学における運動量保存則：**運動量の時間的変化率＝（質量力や圧力による）力積+流れによる運動量の出入**

運動量の保存則から誘導される運動量方程式（momentum equatiomn，オイラーの式のこと．誘導の詳細は別紙参照）は以下のように表される．第 3 回の講義で学習したオイラーの式の形式と少し異なっているが同じものである．

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial \rho uu}{\partial x}+\frac{\partial \rho uv}{\partial y}+\frac{\partial \rho uw}{\partial z}=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t}+\frac{\partial \rho vu}{\partial x}+\frac{\partial \rho vv}{\partial y}+\frac{\partial \rho vw}{\partial z}=\rho Y-\frac{\partial p}{\partial y} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t}+\frac{\partial \rho wu}{\partial x}+\frac{\partial \rho wv}{\partial y}+\frac{\partial \rho ww}{\partial z}=\rho Z-\frac{\partial p}{\partial z} \tag{6}$$

2.　運動量の定理の積分表示

水理学では管壁などが流体から受ける力を算定したい場合が多々ある．運動量方程式（オイラーの式）は三次元の微分方程式であり，数学的にはこの式を連続の式とともに解けば流れの様相や圧力，そして管壁に働く力などを知ることができる．しかしながら通常は解析解を得ることは困難でコンピューターを用いた数値計算で解を求めることになるが，（計算そのものはコンピューターが行うにしても）かなりの手間や労力が必要となる．　通常，水理学では流量や断面平均流速などを未知量とする解析が頻繁に用いられる．さらに流れが定常流であれば運動量方程式は比較的簡単な形に置き換えられる．つまり，運動量方程式を任意のコントロールボリュームに関して積分すれば微分が消え，流量や断面平均流速などの平均量で議論することができる．式(4)～(6)をベクトル表示で一つの式で表示すれば

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}=-\frac{\partial \rho \mathbf{uu}}{\partial \mathbf{x}}+\rho \mathbf{X}-\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}=-\nabla \rho \mathbf{uu}+\rho \mathbf{X}-\nabla p \tag{7}$$

$\mathbf{X}$ は質量力のベクトル，$\mathbf{x}$ は座標ベクトル（x，y，z），∇ は勾配表す演算子（6 回目のプリント参照）である．

定常流の運動量方程式（式(7)において左辺を 0 とする）を任意のコントロールボリュームで積分する．ベクトル解析学的表現を用いれば次のようになる．

$$0=-\int_S \rho \mathbf{uu}\cdot \mathbf{n}dS+\int_V \rho \mathbf{X}dV-\int_S p\mathbf{n}dS \tag{8}$$

S はコントロールボリュームの表面を，V はコントロールボリュームの体積を意味する．n はコントロールボリューム表面に直交する外向き法線単位ベクトル (外向きが正) である. 左辺の 0 は定常をとなる．右辺第一項はコントロールボリュームの表面から単位時間あたりに流出・流入する運動量，右辺第二項はコントロールボリューム全体の質量力，右辺第三項はコントロールボリュームの全表面に働く表面力（圧力）である．圧力は内向きに働くので右辺第三項には負号がついていると解釈してよい．定常状態ではこれらが釣り合っていることになる．

コントロールボリューム内で単位時間あたりに生成される運動量は単位時間あたりの力積であるので式(7)の右辺の総和が力積となる．まとめれば以下のようになる．

0（コントロールボリュームが持つ運動量の時間的変化量がゼロ；定常状態）＝
（コントロールボリュームに単位時間当たりに流入する運動量の量）—
（コントロールボリュームに単位時間当たりに流出する運動量の量）
+（コントロールボリューム内の流体に働く質量力）
+（コントロールボリューム内の表面に働く圧力の合力）　(9)

水理学でよく用いられる定常流に対する運動量保存の法則の積分表示で，単に**運動量の定理**と呼ばれることが多い．物理的な意味は各種の力が釣りあっていることを示している．式(8)は定常流に対する定理であることに注意！！

具体的な例として図-2 に示す流管（ある空間の中で流線を束にしたもの．定常流では一種の管路と考えて良い．逆に管路を流線を束にした流管と考えてもよい.）の一部（コントロールボリュームとする）に運動量の定理を流れ方向に適用してみよう．断面①から v_1 の流速で運動量 ρv_1 が流入する．運動量フラックスは $\rho v_1 v_1$ である．断面②からは v_2 の流速で運動量 ρv_2 が流出する．このときの運動量フラックスは $\rho v_2 v_2$ である．流管の側壁を横切る流れがないので，側面から流入流出する運動量はない．したがって単位時間当たりの運動力の正味の流入量（流入量から流出量を引いた量）は以下のようになる．

$$\text{単位時間あたりの運動量の正味の流入量} = \rho v_1 v_1 A_1 - \rho v_2 v_2 A_2$$

$$= \rho Q v_1 - \rho Q v_2 = \rho Q(v_1 - v_2) \tag{10}$$

A_1，v_1 はそれぞれ断面①の断面積と断面平均流速，A_2，v_2 はそれぞれ断面②の断面積と断面平均流速である．定常流を前提としているので連続の式から $Q= A_1v_1= A_2v_2$ である．

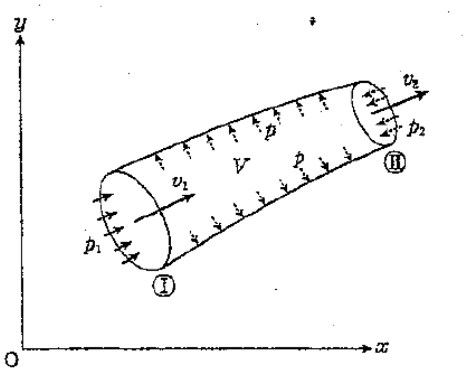


図 2: 流管

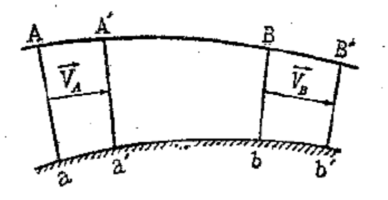


図 3: 流管の一部が壁面（物体）

次にコントリールボリュームに働く質量力と表面力を考える．表面力は断面①と②に働く圧力 p_1 と p_2，側面に働く圧力の合力の流れ方向成分 P_S，流れ方向の重力成分 g_S，コントロールボリュームの体積を V とする．流れ方向の力の釣り合いより

$$0 = \rho Q(v_1 - v_2) + p_1 A_1 - p_2 A_2 + P_S + \rho g_S V \tag{11}$$

となる．x，y 方向成分は

$$0=\rho Q(v_1)_x-\rho Q(v_2)_x+(p_1A_1)_x-(p_2A_2)_x+(P_S)_x+\rho g_xV$$
$$0=\rho Q(v_1)_y-\rho Q(v_2)_y+(p_1A_1)_y-(p_2A_2)_y+(P_S)_y+\rho g_yV$$

となる．括弧の外の添え字 x，y はそれぞれの方向の成分を表す.

まとめれば以下のようになる．図-3 を参照して

$$0=\rho Q(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)+\mathbf{X}+\mathbf{G}+\mathbf{K} \tag{12}$$

以下のように記述されることも多い.

$$\rho Q(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)=\mathbf{X}+\mathbf{G}+\mathbf{K} \tag{12'}$$

ここで

$\mathbf{u}_1$：コントロールボリュームに流入する流速ベクトル
$\mathbf{u}_2$：コントロールボリュームから流出する流速ベクトル
$\mathbf{X}$：コントロールボリューム内の流体に働く質量力
$\mathbf{K}$：物体の表面（例えば図-3 の ab 面）に働く表面力　（注：物体の表面もコントロールボリュームの表面の一部である．**流体が物体から受ける力を表している**.）
$\mathbf{G}$：コントロールボリュームの仮想面（物体表面以外の表面）に働く表面力

物体が流体から受ける力を $\mathbf{F}$ とすると作用反作用により $\mathbf{F}=-\mathbf{K}$ となる．壁など物体が流体から受ける力を求めたい場合は

$$\mathbf{F}=\rho Q(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)+\mathbf{X}+\mathbf{G} \tag{13}$$

運動量の定理はコントロールボリュームの表面における物理量だけが分かれば，内部の様相を知らなくても答えが出せる極めて便利な方法であり，応用範囲が広い.

3. 例題

図−4 のように水平面内で直径 8.00cm の噴流が 45.0m/sec の速度で垂直に衝突して 90 度に曲げられている．板に働く力を求めよ．また板が 20.0m/sec の速度で噴流の方向（x 方向）に動いているときの板に働く力を求めよ．

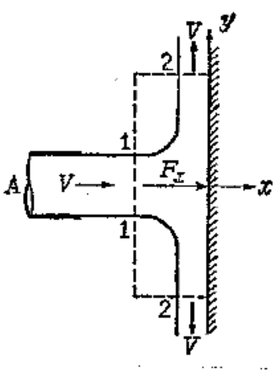


図 4: 板に衝突する噴流

解答：式(12)を用いるが，この場合板は y 方向に沿っており噴流は x 方向であるので y 方向に力は生じない．よって x 方向成分だけを考えればよい．図中の点線と壁で囲まれた部分がコントロールボリュームである．式(12)は以下のようになる．

$$F_x = \rho Q\left(V_1 - V_2\right) + X + G$$

V_1 は流入流速で V である．V_2 は x 方向にコントロールボリュームから流出する流速であるが，流れが y 方向に転じているため x 方向の流出流速は 0 である．したがって V_2=0 となる．仮想面に働く力（圧力）は G=pA となる．p は仮想面 1 の圧力である．大気中の噴流の圧力は大気圧と考えて良いので p=0 である．よって G=0 である．X は x 方向の質量力であるが水平に設置しているので重力加速度の x 方向成分は 0 であるため，X=0 となる．したがって次式を得る．

$$F_x = \rho Q V$$

数値を代入すると

$$F_x = 1000(kg/m^3) \times 45.0(m/\mathrm{sec}) \times \frac{3.14 \times \left(8.00 \times 10^{-2}\right)^2}{4}(m^2) \times 45.0(m/\mathrm{sec}) = 10173.6(N) = 10.2(kN)$$

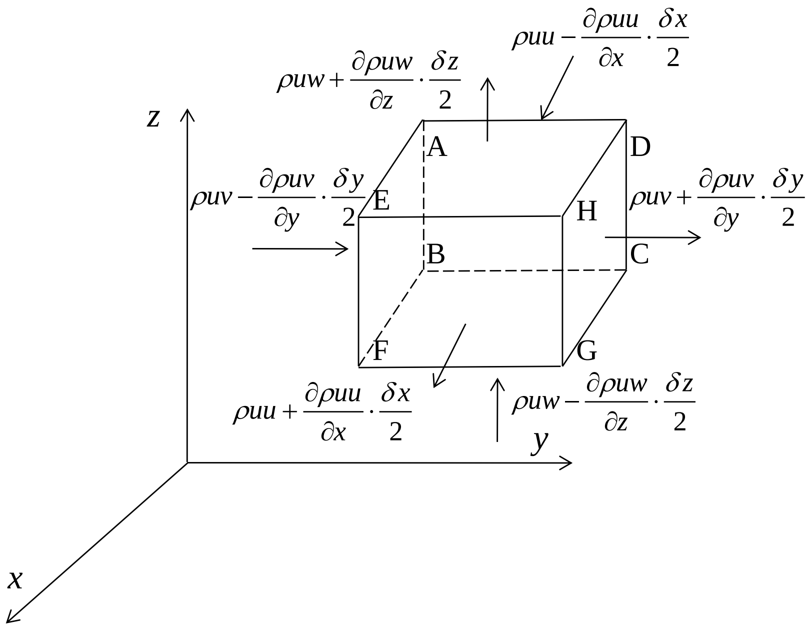
板の移動速度を v とする．板からみると噴流の速度は V-v となる（相対速度）．したがって流量も Q=(V-v)A となることに注意する．

$$F_x = \rho Q\left(V - v\right) = \rho\left(V - v\right)^2 A$$

となる．数値を代入すると

$$F_x = 1000(kg/m^3) \times \left(45.0 - 20.0\right)^2 (m^2/\mathrm{sec}^2) \times \frac{3.14 \times \left(8.00 \times 10^{-2}\right)^2}{4}(m^2) = 3140.0(N) = 3.14(kN)$$

付録　運動量保存則による運動量方程式（オイラーの式）の誘導



図–4　コントロールボリューム（微小直方体）

第 3 回のプリントでは実質微分を用いてオイラーの式を $F=ma$ から導いたが式(3)に基づいて誘導する．図-5 に示す微小直方体（コントロールボリューム）を考える．コントロールボリュームの中心座標を（x，y，z）とし，それぞれの辺の長さを dx，dy，dz とする．

まず x 方向の運動量保存について考える．コントロールボリュームに作用する外力 F_x（質量力と圧力）についてはすでに第 3 回のプリントで説明しているのでそれを参照してもらうことにし，結果を記せば以下のようになる．

$$F_x = \rho \delta x \delta y \delta z \cdot X - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \tag{14}$$

次に流れによって出入りする運動量について考える．x 方向の運動量はρu であるのでそれがすべての面から流入あるいは流出する．図-5 を参考に単位時間に流入する運動量フラックスは以下のようになる．

ABCD 面： $\rho uu - \frac{\partial \rho uu}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$

ABFE 面： $\rho uv - \frac{\partial \rho uv}{\partial y}\frac{\delta y}{2}$

BCGF 面： $\rho uw - \frac{\partial \rho uw}{\partial z}\frac{\delta z}{2}$

次に流出する運動量フラックスは以下のようになる．

EFGH 面： $\rho uu + \frac{\partial \rho uu}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$

CDHG 面： $\rho uv + \frac{\partial \rho uv}{\partial y}\frac{\delta y}{2}$

ADHE 面： $\rho uw + \frac{\partial \rho uw}{\partial z}\frac{\delta z}{2}$

流入量から流出量を引けば正味の流入量が以下のように得られる．（運動量フラックに面積と単位時間をかける.）

$$
\begin{aligned}
（単位時間当たりの正味の流入運動量） &= \left(\rho uu - \frac{\partial \rho uu}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y \delta z - \left(\rho uu + \frac{\partial \rho uu}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y \delta z \\
&+ \left(\rho uv - \frac{\partial \rho uv}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x \delta z - \left(\rho uv + \frac{\partial \rho uv}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x \delta z \\
&+ \left(\rho uw - \frac{\partial \rho uw}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta x \delta y - \left(\rho uw + \frac{\partial \rho uw}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta x \delta y \\
&- \frac{\partial \rho uu}{\partial x}\delta x \delta y \delta z - \frac{\partial \rho uv}{\partial y}\delta x \delta y \delta z - - \frac{\partial \rho uw}{\partial z}\delta x \delta y \delta z
\end{aligned}
\tag{15}
$$

したがって外力 F_x は

$$
F_x = \left(-\frac{\partial \rho uu}{\partial x} - \frac{\partial \rho uv}{\partial y} - \frac{\partial \rho uw}{\partial z} + \rho \cdot X - \frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta x \delta y \delta z \tag{16}
$$

コントロールボリュームの x 方向運動量は $\rho \delta x \delta y \delta z \cdot u$ である．δt 後の運動量はテイラー展開から

$$
\delta t \text{ 後の運動量} = \rho \delta x \delta y \delta z \cdot u + \frac{\partial \rho \delta x \delta y \delta z \cdot u}{\partial t}\delta t \tag{17}
$$

となる．式(17)の右辺第二項は δt 間の運動量の増分（変化量）である．ニュートンの第二法則から式(15)に δt を乗じたものと δt 間の運動量の増分は等しいので次式を得る．

$$
\frac{\partial \rho \delta x \delta y \delta z \cdot u}{\partial t}\delta t = \frac{\partial \rho u}{\partial t}\delta x \delta y \delta z \delta t = F_x \delta t = \left(-\frac{\partial \rho uu}{\partial x} - \frac{\partial \rho uv}{\partial y} - \frac{\partial \rho uw}{\partial z} + \rho \cdot X - \frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta x \delta y \delta z \delta t
$$

$$
\frac{\partial \rho u}{\partial t}\delta x \delta y \delta z \delta t = \left(-\frac{\partial \rho uu}{\partial x} - \frac{\partial \rho uv}{\partial y} - \frac{\partial \rho uw}{\partial z} + \rho \cdot X - \frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta x \delta y \delta z \delta t
$$

$$
\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\frac{\partial \rho uu}{\partial x} - \frac{\partial \rho uv}{\partial y} - \frac{\partial \rho uw}{\partial z} + \rho \cdot X - \frac{\partial p}{\partial x}
$$

$$
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho uu}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{18}
$$

他の方向も同様にして

$$
\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho vu}{\partial x} + \frac{\partial \rho vv}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} \tag{19}
$$

$$
\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho wu}{\partial x} + \frac{\partial \rho wv}{\partial y} + \frac{\partial \rho ww}{\partial z} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} \tag{20}
$$

式(18)～(20)は式(4)～(6)である．

さて式(17)の左辺を次のように展開する．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho uu}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} &= \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial \rho v}{\partial y} + \rho u \frac{\partial w}{\partial z} + u\frac{\partial \rho w}{\partial z} \\
&= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial w}{\partial z}\right) + u\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

式(20)の右辺の u で括った括弧の中は質量保存則（3 回目のプリンとの式(8)）で 0 であるため．よって

$$
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho uu}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{22}
$$

を得る．式(22)を式(18)に代入すると

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial \rho uu}{\partial x}+\frac{\partial \rho uv}{\partial y}+\frac{\partial \rho uw}{\partial z}=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial w}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

となる．これは 3 回目のプリントの式(14)でオイラーの式に他ならない.