粘性流体の力学(1)　粘性流体の基礎方程式と応力テンソル

Dynamics of viscus fluid #1

Basic equation for viscus fluid and stress tensor

教科書 pp.125-137

1. 粘性流体の運動方程式

1-1 D’Alembert（ダランベール）のパラドックス(paradox)

完全流体は理想流体とも呼ばれ粘性を無視した現実には存在しない流体である．したがって完全流体で実現象を解析したときに矛盾が生じる．**例えば静止流体中で等速運動している物体は当然流体の抵抗を受けるが，完全流体では抵抗が生じないという結果が得られてしまう．これを D’Alembert のパラドックスという．**また粘性の作用で壁面と流体間で摩擦抵抗が生じ，結果として流体はエネルギーの一部を失う（エネルギー損失)．完全流体ではエネルギー損失は発生せず，これも現実と矛盾する．**矛盾の原因は完全流体では粘性を無視しているため，表面力としてせん断応力が現れないことである．**したがってせん断応力を考慮した実在流体に関する運動方程式を考えよう．

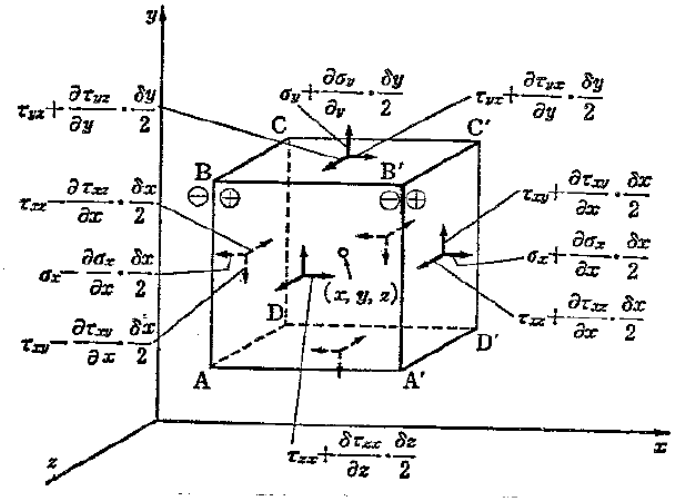
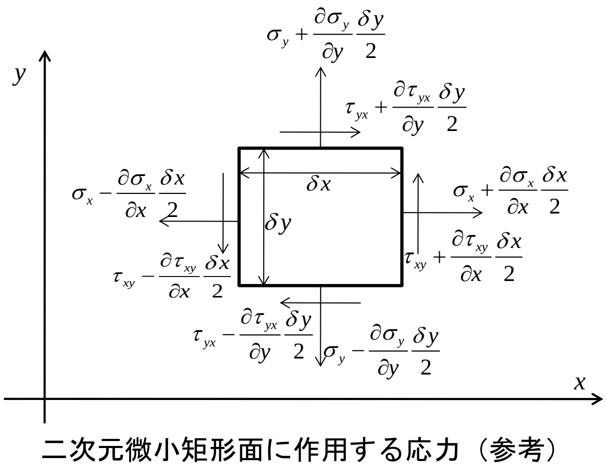


図-1　三次元微小直方体に作用する応力



二次元微小矩形面に作用する応力（参考）

1-2 応力テンソル（stress tensor）

図-1 に示すような流れの中に微小直方体（コントロールボリューム）を考える（参考までに二次元要素の応力表示も下段に示す.)．コントロールボリュームの中心座標を（x，y，z)，辺の長さをδx，δy，δz とする．各面に働く応力（表面力）は図-1 に示すように，面に平行な方向（接線方向）に働く応力（せ

ん断応力，または接線応力ともいう）と面に垂直な方向（法線方向）に働く応力（法線応力）に分けられる．ここでは粘性に起因する応力をτで表現する．また法線応力はσで表す．σは圧力 p と粘性による法線応力τの和である．ところで表面量を正確に表現するには単にτと記述するだけでは不十分である．どの面にどの方向に作用しているのかを示す必要がある．そこで

$$\tau_{xy}$$

のように記述する．**ここで x は x 軸に直交する面を表し，y は応力の方向を表す．** したがってτ_{xy}ならば x 軸に直交する面（図-1 の ABCD 面または A’B’C’D’面）における y 方向の応力である．τ_{zx} ならば z 軸に直交する面（図-1 の CDD’C’面または AB’B’A 面）における x 方向の応力である．微小直方体に作用する応力は以下のように表される．

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p+\tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p+\tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p+\tau_{zz} \end{pmatrix} \tag{1}$$

このように応力を表す行列（matrix）を応力テンソルという．

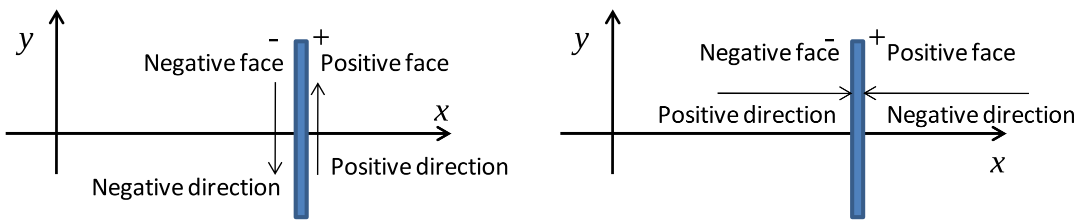
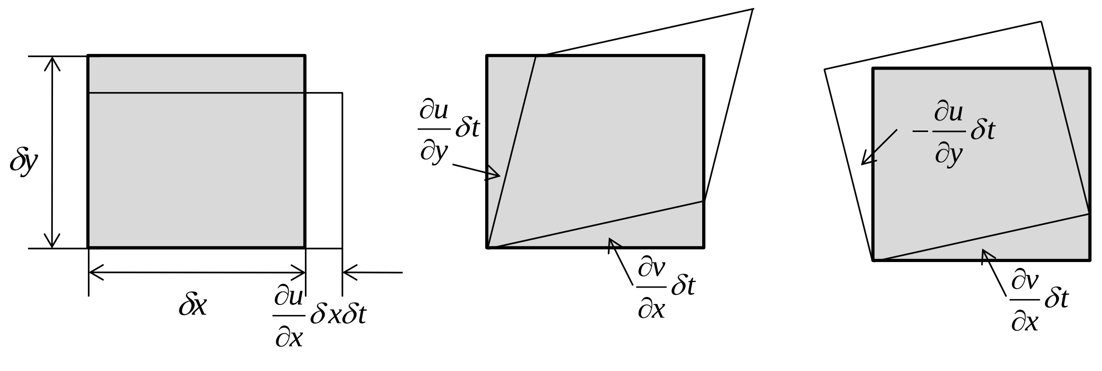


図-2　正の応力の例　　　　図-3　負の応力の例（圧力の場合）

応力はベクトルであるので方向によって正負が変わる．図-2 に示すように正の面の正の方向の応力が正である（負の面に負の方向の応力も正である．）．図-3 は圧力 p の方向を示している．圧力は正の面に負の方向に働く応力であるので負の応力である（負の面に正の方向の応力も負である．）．圧力 p は負の応力であるので $-p$ は正の応力となる．

1-3 流体の変形運動



(a)伸縮（Stretching）　(b)ずり変形（Distortion）　(c)回転（Rotation）

図-4　流体要素の変形

流体中に微小な流体要素を考える．この流体要素は流体の運動に伴って図-4 に示すような伸縮，ずり変形，回転を受け変形する．**粘性流体では変形に対抗して応力が働くので変形運動を考えることは重要である．**

変形の数学的表現について考えてみよう．流体中に接近する 2 点 $P(x,y,z)$と Q($x+dx,\ y+dy,\ z+dz$)を考える．それぞれの点における流速を(u,v,w), $(u+du,\ v+dv,\ w+dw)$とする．2 点間の相対速度（$du,\ dv,\ dw$）は Taylor 展開（全微分）より次のように求まる．

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \tag{2}$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \tag{3}$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \tag{4}$$

式(2)を次のように変形しよう．

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}dy - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}dz - \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}dz \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)dz - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)dz \\ &= \varepsilon_x dx + \frac{1}{2}\gamma_{yx}dy + \frac{1}{2}\gamma_{zx}dz - \frac{1}{2}\omega_z dy + \frac{1}{2}\omega_y dz \end{aligned} \tag{5}$$

式(3)，(4)も同様にして

$$dv = \frac{1}{2}\gamma_{xy}dx + \varepsilon_y dy + \frac{1}{2}\gamma_{zy}dz + \frac{1}{2}\omega_z dx - \frac{1}{2}\omega_x dz \tag{6}$$

$$dw = \frac{1}{2}\gamma_{xz}dx + \frac{1}{2}\gamma_{yz}dy + \varepsilon_z dz - \frac{1}{2}\omega_y dx + \frac{1}{2}\omega_x dy \tag{7}$$

ここで

$$\left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{8}$$

$$\left(\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\right) = \left(\gamma_{zy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yx}\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{9}$$

$$\left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{10}$$

式(8)は流体要素が流れによって引き延ばされる（あるいは圧縮される）こと，つまり伸縮変形の速度を表す．式(9)は初めに矩形であった流体要素の平行四辺形への変形を表し，ずり変形速度と呼ばれる．式(10)は流体要素の回転を表す（渦度）流体が運動しているとき，これら三種類の変形が同時に発生している．

1-4 ナビエ・ストークスの方程式（Navie-Storks equation）

図-1 を参照に粘性流体の運動方程式を考えよう．まず x 方向の外力（質量力と表面力の和）を考える．微小直方体に働く外力 F_x は

$$\begin{aligned} F_x =& \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y \delta z - \left(\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y \delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x \delta z - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x \delta z \\ &+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta x \delta y - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta x \delta y + \rho \delta x \delta y \delta z X \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\delta x \delta y \delta z + \rho \delta x \delta y \delta z X$$

$$= \rho \delta x \delta y \delta z X - \frac{\partial p}{\partial x}\delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\delta x \delta y \delta z \tag{11}$$

式(11)の右辺第一項は重力項（質量力），第二項は圧力勾配項（表面力），第三～五項は粘性によるせん断応力項（表面力）である．オイラーの式と比較して新たに第三～五項が付加されている．オイラーの式と同様にニュートンの第二法則を用いれば次式を得る．

$$\rho \delta x \delta y \delta z \frac{Du}{Dt} == \rho \delta x \delta y \delta z X - \frac{\partial p}{\partial x}\delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\delta x \delta y \delta z$$

$$\frac{Du}{Dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) \tag{12}$$

同様にして y，z 方向の運動方程式はそれぞれ

$$\frac{Dv}{Dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) \tag{13}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) \tag{14}$$

式(12)～(14)は粘性流体の運動方程式であるがせん断応力がτのまま記述されているので未知量が増えている．方程式系を閉じさせるために（式の数と未知量の数を一致させる）にはせん断応力と流速を関係づける必要がある．

弾性体では応力は変形（ひずみ）と関係づけられる（フックの法則）．流体では変形速度（式(8)，(9)）と粘性による応力が関連づけられ，以下のように表される．

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

μを粘性係数（dynamic viscosity）とよぶ．上式のように応力と変形速度が比例関係にある流体を Newton 流体と呼ぶ．上式を式(12)に代入すると，

$$\frac{Du}{Dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

$$= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}$$

$$= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}$$

$$= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{15}$$

ここで非圧縮性の連続の式を用いて最終的な式形を求めている．また $\nu=\mu/\rho$ であり動粘性係数（kinematic viscosity）と呼ばれる．他の方向も同様にすれば**非圧縮性粘性流体の運動方程式**が次のように得られる．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{16}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{17}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{18}$$

この運動方程式を Navie-Storks（ナビエ・ストークス）の方程式と呼ぶ.