粘性流体の力学(2)　ナビエ・ストークス方程式の無次元化と相似側

Dynamics of viscus fluid #2

Non-dimension of NS equation and similarity

教科書 pp.145-147

1. ナビエ・ストークス方程式の無次元化

連続の式とナビエ・ストークス方程式を以下示す.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=g_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=g_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{4}$$

ここで u,v,w はそれぞれ x,y,z 方向の流速、g_x，g_y，g_z はそれぞれ x,y,z 方向の重力加速度，p は圧力，ρ は流体の密度である．これらの式を無次元化しよう（その意義は後で述べる.）.

まず独立変数 x，y，z を以下のように表示する.

$$x=L\tilde{x}$$
$$y=L\tilde{y}$$
$$z=L\tilde{z}$$

ここで，～（tilde：チルダと呼ぶ）は無次元量を表す記号である．L は代表長さスケール（長さの次元を持つ）で管路であれば直径を，開水路であれば水深が良く用いられる．次に流速を次のようにア表す.

$$u=U\tilde{u}$$
$$v=U\tilde{v}$$
$$w=U\tilde{w}$$

U は代表速度さスケール（速度の次元を持つ）で断面平均流速などが良く用いられる．次に時間 t を以下の様に表す.

$$t=\frac{L}{U}\tilde{t}$$

これらを連続の式（式(1)）に代入すると

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial U\tilde{u}}{\partial L\tilde{x}}+\frac{\partial U\tilde{v}}{\partial L\tilde{y}}+\frac{\partial U\tilde{w}}{\partial L\tilde{z}}=0$$

$$\frac{U}{L}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}+\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}}\right)=0$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}+\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}}=0 \tag{5}$$

式(5)は無次元化された連続の式である．形式は式(1)と同じであるが次元を持っていないことに注意しよう．次に同様にして式(2)に独立変数と流速を代入してみよう．

$$\frac{\partial U\tilde{u}}{\partial \frac{L}{U}\tilde{t}}+U\tilde{u}\frac{\partial U\tilde{u}}{\partial L\tilde{x}}+U\tilde{v}\frac{\partial U\tilde{u}}{\partial L\tilde{y}}+U\tilde{w}\frac{\partial U\tilde{u}}{\partial L\tilde{z}}=g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial L\tilde{x}}+\nu\left(\frac{\partial^2 U\tilde{u}}{\partial (L\tilde{x})^2}+\frac{\partial^2 U\tilde{u}}{\partial (L\tilde{y})^2}+\frac{\partial^2 U\tilde{u}}{\partial (L\tilde{z})^2}\right)$$

$$\frac{U^2}{L}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}+\frac{U^2}{L}\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}+\frac{U^2}{L}\tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}+\frac{U^2}{L}\tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}}=g_x-\frac{1}{\rho L}\frac{\partial p}{\partial \tilde{x}}+\nu\frac{U}{L^2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}\right)$$

$$\frac{U^2}{L}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}+\tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}}\right)=g_x-\frac{1}{\rho L}\frac{\partial p}{\partial \tilde{x}}+\nu\frac{U}{L^2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}+\tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}}=\frac{g_x L}{U^2}-\frac{1}{\rho U^2}\frac{\partial p}{\partial \tilde{x}}+\frac{\nu}{UL}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}+\tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}}=\frac{1}{\frac{U^2}{g_x L}}-\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\left(\frac{p}{\rho U^2}\right)+\frac{1}{\frac{UL}{\nu}}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}+\tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}}=\frac{1}{\mathrm{F}_{Rx}{}^2}-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}\right) \tag{6}$$

他方向の運動方程式も同様に無次元化を行うと次式を得る．

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}+\tilde{w}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}}=\frac{1}{\mathrm{F}_{Ry}{}^2}-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}}+\tilde{w}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}}=\frac{1}{\mathrm{F}_{Rz}{}^2}-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2}\right) \tag{8}$$

ここで，F_{Rx}，F_{Ry}，F_{Rz} はそれぞれ x，y，z 方向の重力加速度成分で定義される無次元パラメーターで以下のように定義される．

$$\mathrm{F}_{Rx}=\frac{U}{\sqrt{g_x L}}$$

$$\mathrm{F}_{Ry}=\frac{U}{\sqrt{g_y L}}$$

$$\mathrm{F}_{Rz}=\frac{U}{\sqrt{g_z L}}$$

これらはフルード数（Froude number）と呼ばれる．座標を水平方向（x，y 方向）と鉛直方向（z 方向）にとれば F_{Rx}，F_{Ry} は無限大となり（水平方向のフルード数は定義できない．この場合式(6)，(7)では単純に右辺第一項が存在しないだけである）F_{Rz} は

$$\mathrm{F}_{Rz}=\frac{U}{\sqrt{gL}}$$

となる．開水路では L を水深 h にすることが多いので h を代入すると

$$\mathrm{F}_{R}=\frac{U}{\sqrt{gh}}$$

となる．これは水理学 I でも出てきたフルード数で流速と波速（長波の波速）の比である．フルード数が 1 以上で射流（super-critical flow），1 以下で常流（sub-critical flow），1 で限界流（critical flow）

である．また一般にフルード数は運動方程式の慣性項（inertia term：動方程式の左辺の項）と重力項（gravity term：運動方程式の右辺第一項）の比と解釈される．

Re はレイノルズ数（Reynolds number）と呼ばれる無次元パラメーターで運動方程式の慣性項と粘性項（viscus term：運動方程式の右辺第三項）の比と解釈される．

$$\mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}$$

管路では管径 D を，開水路では水深 h が L として用いられるので

$$\mathrm{Re}=\frac{UD}{\nu},\quad \mathrm{Re}=\frac{Uh}{\nu}$$ となる．

このパラメーターの値が大きいと慣性力が相対的に強く，小さいと粘性力が相対的に強いことを表す．これは流れが層流か乱流か区別するさいに用いられる．

2. 相似側（similarity）

ダムや堰などの水理構造物を設計する際に模型実験を実施することが多々ある．当然ながら実物（prototype）は大きいため模型（model）は必然的に小さくせざるを得ない．模型は実物と大きさだけが異なる同じ形状を持つ構造物あるいは地形（河川断面など）となる．実物と模型の大きさの比を縮尺（scale）と呼び，模型は実物と幾何学的に相似となる．さて，模型と実物の縮尺を仮に 1/100 としよう．実際に実験する際に例えば縮尺が 1/100 であるので流速も 1/100 で良いのであろうか？流速などの力学的諸量は幾何学的相似（geometric similarity）ではなく力学的相似（dynamic similarity）で決定しなければならない．

無次元化されたナビエ・ストークス方程式において実物と模型においてフルード数とレイノルズ数が同じであれば力学的相似が成立している．つまり実物と模型で幾何学的な大きさが異なっていてもそれぞれで発生している流体力学的現象は本質的（力学的に）に同じである．

これは流体現象はフルード数，レイノルズ数で規定されることを意味する．無次元化を行う意義は幾何学的スケールを気にすることなく現象の本質を議論することができることである．

<u>幾何学的相似：</u>

模型の大きさ L_m と実物の大きさ L_P の比．　$\frac{L_m}{L_p}=\lambda$，λは縮尺である．

<u>フルードの相似側：</u>

実物と模型でフルード数を合わせる．　$\frac{U_p^2}{gL_p}=\frac{U_m^2}{gL_m}$，$\frac{U_m^2}{U_p^2}=\frac{L_m}{L_p}=\lambda$，$\frac{U_m}{U_p}=\lambda^{1/2}$，流速の力学的縮尺は模型縮尺の平方根にしなければならない．

<u>レイノルズの相似側：</u>

実物と模型でレイノルズ数を合わせる．　$\frac{U_pL_p}{\nu_p}=\frac{U_mL_m}{\nu_m}$，$\frac{\nu_m}{\nu_p}=\frac{U_mL_m}{U_pL_p}=\lambda^{1/2}\lambda=\lambda^{3/2}$，動粘性係数の力学的縮尺は模型縮尺の 3/2 乗にしなければならない．

フルードの相似側とレイノルズの相似側の両者を同時に満足する実験が望ましいが通常は，両相似側を同時に満足することは難しい．例えば異なる粘性とは異なる流体を用いることであり都合の良い流体を準備することは困難である．例えば実物と模型で同じ流体を用いる場合には動粘性係数は同一になるので

$\dfrac{U_p L_p}{\nu} = \dfrac{U_m L_m}{\nu}$, $\dfrac{U_p}{U_m} = \dfrac{L_m}{L_p} = \lambda$, $\dfrac{U_m}{U_p} = \lambda^{-1}$ となる．これはフルードの相似側から得られる力学的縮尺とは異なる．

通常は目的に応じてどちらかの相似側に合わせえて実験を行うことになる．例えば自由水面を持たない管路ではレイノルズの相似側を，開水路のように自由水面を持つ場合にはフルードの相似側が用いられる．